1.- Encontrar la serie de potencias de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados y dar el radio de convergencia de cada serie.

(a) $\dfrac{1}{2-z}$ en $z=0$,

(b) $\dfrac{1}{2-z}$ en $z=12$,

(c) $\dfrac{1}{(1-z)(4+z)}$ en $z=0$,

(d) e^z en $z=i$.

2.- Suponiendo que es correcto integrar una serie de potencias dentro de su conjunto de convergencia (que es cierto), utilizar el desarrollo en serie de $\dfrac{1}{1+z}$ para obtener la serie $\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$. Hallar su radio de convergencia. Haciendo $z=x+iy$, y tomando la parte imaginaria en la serie anterior, obtener el desarrollo en serie de $\arctan y$.

3.- Encontrar los primeros coeficientes de la serie de Taylor de $\tan z$ de dos formas distintas:

(a) Usando $c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Cuando te canses de hallar derivadas prueba con

(b) $\tan z=\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}=\dfrac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\cdots}{1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\cdots}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$. Multiplicando por $\cos z$ y hallando los coeficientes: primero c_0, después c_1 y así sucesivamente. También se puede intentar mediante el producto de Cauchy de $\cos z$ con la serie $c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$

4.- Hallar el valor de a para que la siguiente función sea holomorfa $z=0$. En ese caso, encontrar su desarrollo de Taylor en $z=0$ y su radio de convergencia.

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{e^z-1-z}{z^2} & \text{si } z\neq 0\\ a & \text{si } z=0\end{cases}$$

Encontrar también el valor de $f^{(k)}(0)$ para todo entero positivo *k*.

5.- Usando el desarrollo de Taylor de la función $f(z)=(1+z)^n$ en $z=0$ y el binomio de Newton, deducir que $f^{(k)}(0)=\dbinom{n}{k}k!$

6.- Comprobar que $(\tan z)'=1+\tan^2 z$, usando su desarrollo de Taylor y el producto de Cauchy.