# Más PROBLEMAS DE VARIABLE COMPLEJA (Integración: Fórmula de Cauchy y Fórmula de Cauchy para las Derivadas)

---

## Resultados teóricos:

**1) <u>Teorema de Cauchy</u>**

*Si f(z) es analítica sobre un contorno cerrado C y su interior, entonces* $\int_C f(z)dz = 0$

**<u>2. FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY</u>**

*"Sea f(z) analítica sobre un contorno cerrado C y su interior D. Entonces* $\forall z_0 \in D$ *es :* $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$ *donde C se recorre en sentido positivo".*

**a) <u>Teorema (Fórmula de Cauchy para las derivadas)</u>**

*Sea f(z) analítica en un contorno cerrado C y su interior D. Entonces:*

*i)* $\forall z \in D$ *es* $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$ *(C en sentido positivo)*

*ii) Además f(z) es indefinidamente derivable en D y* $\forall n \in N$ *y* $\forall z \in D$ *es:*

$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$ *donde C se recorre en sentido positivo.*

---

## Ejercicios:

**1.-** Calcular $I = \int_C \frac{sen(\pi z)}{z^2 + 4}\,dz$, siendo C el contorno $|z| = 1$ recorrido en sentido antihorario.

**2.-** Calcular $I = \int_C \frac{sen(\pi z)}{(z-1)^2}\,dz$, siendo C el contorno $|z| = 3$ recorrido en sentido antihorario.

**3.-** Calcular $I = \int_C z\,dz$ donde C es el arco de la circuferencia $|z| = 2$ desde $z = -2$ hasta $z = -2i$.

**4.-** Calcular $I=\int_{|z-2|=3}\frac{\cos z}{z^2}\,dz$ recorrido el contorno en sentido positivo.

**5.-** Calcular $I=\int_{|z-1|=1}\frac{1-z^4}{z^2+1}\,dz$ recorrido el contorno en sentido positivo.

**6.-** Calcular $I=\int_{|z|=5}\frac{\overline{z}}{5}\,dz$ recorrido el contorno en sentido positivo.

**7.-** Calcular $I=\int_{|z-2|=1}\frac{\cos z}{z}\,dz$ recorrido el contorno en sentido positivo.

**8.-** Calcular $I=\int_{|z-i|=1}\frac{z+1}{z^2+1}\,dz$ recorrido el contorno en sentido positivo.

**9.-** Calcular $I=\int_{|z|=4}\frac{2z+5i}{\left(z^2+9\right)^2}\,dz$ recorrido el contorno en sentido antihorario.

**10.-** Calcular $\int_C\frac{\cos(\pi z)}{z^2-6z+8}\,dz$ siendo C los contornos siguientes, recorridos en sentido antihorario:

a) $|z|=1$ b) $|z-2|=1$ c) $|z-3|=2$

**11.-** Calcular $I_i=\int_{C_i}\frac{Chz}{z^2(z^2+4)}\,dz$ ($C_i$ en sentido positivo) i=1,2,3,4, siendo:

**a)** $C_1$ : |z| =1 **b)** $C_2$ : |z – 2i| = 1 **c)** $C_3$ : |z - i| =2 **d)** $C_4$ : |z - i| $=\frac{1}{2}$

**12.-** Calcular $I=\int_C\frac{e^{2z}}{z^4-16}\,dz$, siendo C la elipse $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{16}=1$, recorrida en sentido antihorario.

**13.-** Por medio de la fórmula de la integral de Cauchy y sus aplicaciones, calcular $I=\int_C\frac{e^{z^2}}{z^3-iz^2}dz$, siendo C: |z-i| = 3, recorrida C en sentido antihorario.

**14.-** Aplicando la fórmula de la integral de Cauchy y sus aplicaciones, calcular $I=\int_C\frac{\cos z}{z^2(z^2+1)}dz$, siendo C: $|z|=\frac{1}{2}$ (C recorrida en sentido antihorario).

## Soluciones:

**1. I = 0, 2. I =** $-2\pi^2 i$ **; 3. I = -4, 4. I = 0, 5. I = 0, 6. I =** $10\pi i$ **, 7. I = 0, 8. I =** $\pi(1+i)$ **, 9. I =** $\frac{10\pi i}{27}$ **10. a) I = 0, b) I =** $-\pi i$ **, c) I = 0, 11. a) I = 0, b) I =** $\frac{-\pi\cos 2}{8}$ **, c) I =** $\frac{-\pi\,\mathrm{sen}\,2}{4}$ **, d) I = 0, 12. I =** $\frac{-\pi\,\mathrm{sen}\,4}{8}$ **, 13. I =** $2\pi i\left(1-e^{-1}\right)$ **, 14. I = 0**