La ecuación de Slutsky: Ejercicio

Microeconomía

Douglas Ramírez

Planteamiento

- Las preferencias de un consumidor están representadas por la siguiente función índice de utilidad

$$U(X,Y)=X^2Y$$

- Este individuo dispone de una renta de 1200 u.m. y los precios son $p_x=p_y=4$

1. Obtenga las funciones de demanda del consumidor

- Suponga que se produce una reducción en el precio del bien X, de modo que pasa a ser igual a 1, manteniéndose al renta y el precio del bien Y

2. Calcule el efecto sobre el consumo de los bienes de la variación en px
3. Descomponga el impacto que sobre el consumo de los bienes ha tenido la variación de px.
   a) En los efectos renta y sustitución de Slutsky
   b) En los efectos renta y sustitución de Hicks

Solución 1

Calculamos las funciones de demanda resolviendo el problema de maximización del consumidor

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\, U(x,y) = x^2 y \\ s.a. \therefore\ p_x x + p_y y = M \end{array}\right\}$$

De las CNPO se tiene

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ -\dfrac{p_x}{p_y} = RMSy,x \equiv -\dfrac{U_x}{U_y} \\ (2)\ p_x x + p_y y = M \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{p_x}{p_y} = -\frac{2xy}{x^2}$$

$$x^d = \frac{2M}{3p_x} \therefore y^d = \frac{\cancel{2}M}{3p_y}$$

Solución 2

El impacto de sobre el consumo de la variación en el precio de X se obtiene a través de las canastas de consumo óptimas en la situación inicial (i) y en la situación final (f). Para ello es suficiente particularizar los valores correspondientes de precios y renta en las funciones de demanda

$$\left.\begin{aligned} x^d(p_x, p_y, M) &= \frac{2M}{3p_x} \Rightarrow x^i(4,4,1200) = \frac{2(1200)}{3(4)} = 200 \\ y^d(p_x, p_y, M) &= \frac{M}{3p_y} \Rightarrow y^i(4,4,1200) = \frac{1200}{3(4)} = 100 \end{aligned}\right\}$$

	Situación Inicial (i)	
	X	*y*
Canastas	200	100
Precios	4	4
Ingreso	1.200	
Utilidad	4.000.000	

$$\left.\begin{aligned} x^d(p_x, p_y, M) &= \frac{2M}{3p_x} \Rightarrow x^f(1,4,1200) = \frac{2(1200)}{3(1)} = 800 \\ y^d(p_x, p_y, M) &= \frac{M}{3p_y} \Rightarrow y^f(1,4,1200) = \frac{1200}{3(4)} = 100 \end{aligned}\right\}$$

	Situación Final (f)	
	X	*y*
Canastas	800	100
Precios	1	4
Ingreso	1.200	
Utilidad	64.000.000	

Solución 3

La reducción en el precio del bien X hace que el consumidor aumente la demanda de X. En las preferencias tipo Cobb-Douglas, la variación en el precio del otro bien no afecta su demanda

$$\frac{\partial x^d}{\partial p_x} = -\frac{2M}{3p_x^2} \therefore \frac{\partial y^d}{\partial \cancel{p_y}} = 0$$

El efecto total (ET) viene dado por la diferencia entre el situación inicial y la situación final

$$ET_x = x^f - x^i = 800 - 200 = 600$$

$$ET_y = y^f - y^i = 100 - 100 = 0$$

Solución 4

Las rectas de presupuesto de la situación inicial y final son:

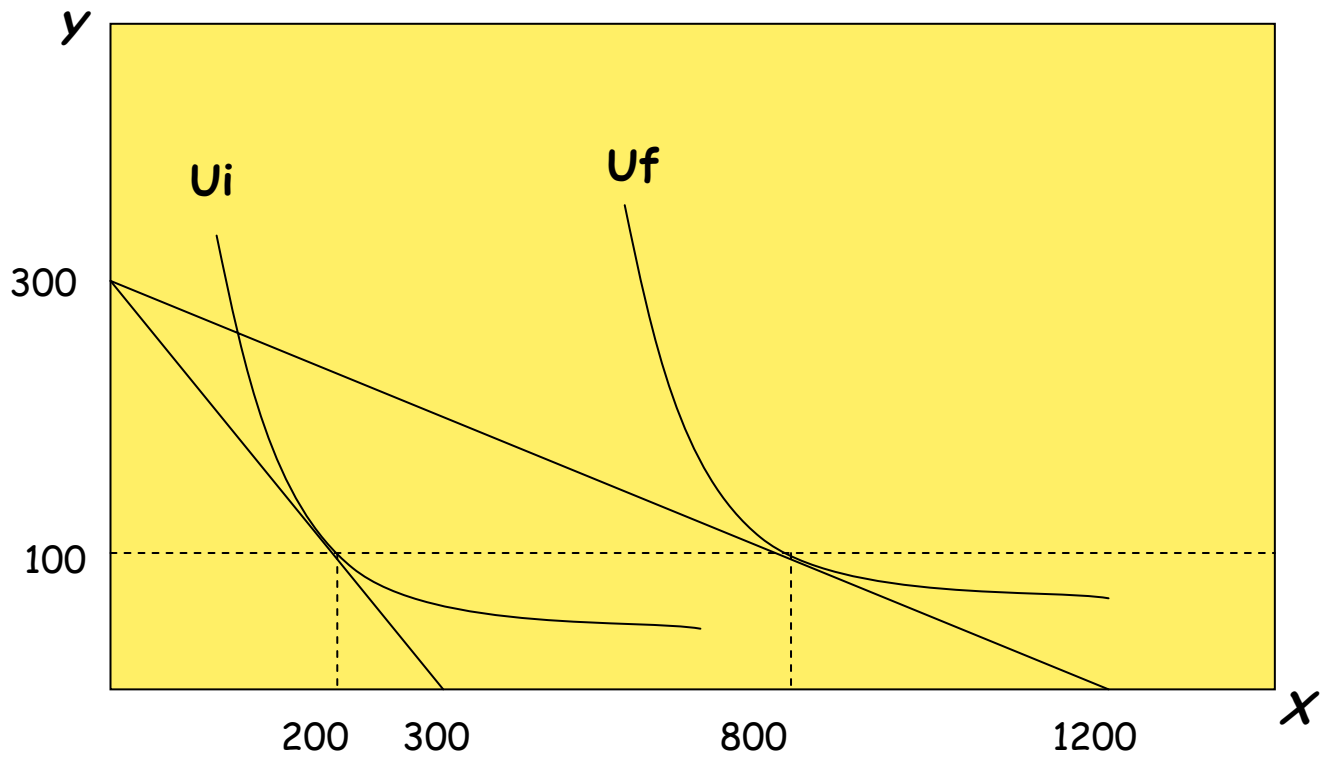
$$\text{Situación (i)} \Rightarrow 4x + 4y = 1200 \Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{RB(i)} = -\dfrac{p_x}{p_y} = -1 \\ \text{Corte Ejes } (300,0);(0,300) \end{cases}$$

$$\text{Situación (f)} \Rightarrow x + 4y = 1200 \Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{RB(i)} = -\dfrac{p_x}{p_y} = -\frac{1}{4} \\ \text{Corte Ejes } (1200,0);(0,300) \end{cases}$$

	Situación Inicial (i)	
	x	*y*
Canastas	200	100
Precios	4	4
Ingreso		1.200
Utilidad		4.000.000

	Situación Final (f)	
	x	*y*
Canastas	800	100
Precios	1	4
Ingreso		1.200
Utilidad		64.000.000

Gráfico



Efectos renta y sustitución

- Cuando se modifica el precio se generan dos tipos de efectos simultáneos.
- Por una parte cambian los precios relativos o relación de intercambio del mercado. Por tanto tenderá a aumentar el consumo del bien que haya relativamente reducido su precios y tenderá a disminuir el precio del bien que relativamente haya aumentado su precio. A este primer efecto se le llama efecto sustitución (ES).
- Por otro lado, la variación en el precio lleva implícito un cambio en la capacidad de compra del consumidor. Aun cuando la renta nominal no ha cambiado la renta real o poder de compra si se a alterado. A este efecto se le llama efecto renta (ER) .

Nivel intermedio

- Para aislar ambos efectos se define, a un nivel instrumental, una situación intermedia entre el efecto inicial y el efecto final, en la que se mantiene constante la capacidad adquisitiva inicial a los precios relativos finales.
- Para ello se analiza cuanta renta habría que dar (si suben los precios) o quitar (si bajan los precios) al consumidor para que a los precios finales, su capacidad adquisitiva permaneciera constante.
- Es, de hecho, como una compensación a los individuos, vía modificación de la renta monetaria, para que la variación de los precios relativos no afectase a su capacidad de compra

Descomposición

- Dependiendo de cual sea el concepto de capacidad adquisitiva real considerado, se tendrá la descomposición de Slutsky o la de Hicks.
- En la descomposición de Slutsky, se considera que la compensación en la renta monetaria debería ser tal que permitiera consumir la cesta inicial.
- En la descomposición de Hicks, la compensación de la renta monetaria ha de permitir que el consumidor acceda al nivel de utilidad inicial.
- Nótese que la situación inicial y final son la misma, independientemente de la descomposición utilizada lo único que cambia es la situación intermedia instrumental.

Los ER y ES en Slutsky 1

- Para descomponer el efecto total en el efecto renta (ER^s) y efecto sustitución (ES^s) en la descomposición de Slutsky, ha de calcularse la variación de la renta monetaria necesaria para que los precios finales la cesta de consumo inicial sea asequible .
- Denotemos con $M=M^i=M^f$, la renta monetaria de que dispone el consumidor, llamemos $p_y=p_y^i=p_y^f$, al precio del bien, por último, llamemos a M^s, la renta necesaria para consumir el la cesta inicial a los precios finales.
- Teniendo en cuenta que la cesta de consumo inicial pertenece a la recta de balance en la situación inicial se tiene:

Los ER y ES en Slutsky 2

Cuando el precio aumenta, para que mantenga el consumidor su poder adquisitivo, habrá que compensarle dándole una renta monetaria adicional y si el precio disminuye, la compensación exigirá restar o sustraer renta monetaria al consumidor

$$\left.\begin{array}{l} M^s = p_x^f x^i + p_y y \\ M = p_x^i x^i + p_y y \end{array}\right\} \Rightarrow M^s - M = \left(p_x^f - p_x^i\right)x^i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta M^s \geq 0 \Leftrightarrow \Delta p_x \geq 0 \\ \Delta M^s \leq 0 \Leftrightarrow \Delta p_x \leq 0 \end{array}\right.$$

Con los datos del ejercicio se puede obtener la compensación de renta como

$$\Delta M^s = \Delta p_x = \left(p_x^f - p_x^i\right)x^i = (1-4)*200 = -600$$

$$M^s = M + \Delta M^s = 1200 - 600 = 600$$

Los ER y ES en Slutsky 3

Para calcular la situación intermedia basta con obtener la demanda de los bienes en que el consumidor, enfrentado a los precios finales, dispusiera de una renta de M^s u.m.

$$\left.\begin{array}{l} x^s = x^s\left(p_x^f, p_y, M^s\right) \\ y^s = y^s\left(p_x^f, p_y, M^s\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^s = \dfrac{2M^s}{3p_x^f} = \dfrac{2(600)}{3(1)} \\ y^s = \dfrac{M^s}{3p_y} = \dfrac{600}{3(4)} = 50 \end{array}\right.$$

Una vez calculada la situación intermedia se puede descomponer el efecto total en efecto sustitución y renta

$$ES_x^S = x^s - x^i = 400 - 200 = 200 \therefore ES_y^S = y^s - y^i = 50 - 100 = -50$$

$$ER_x^S = x^f - x^s = 800 - 400 = 400 \therefore ER_y^S = y^f - y^s = 100 - 50 = 50$$

Los ER y ES en Slutsky 4

Para el ejercicio, y a modo de resumen, la descomposición de Slutsky del impacto total en efecto renta y sustitución se tiene:

$$Datos: \left\{ M = 1200, M^s = 600, p_x^i = 4, p_x^f = 1, p_y = 4 \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(i) \Rightarrow \begin{cases} x^i = x^i\left(p_x^i, p_y, M\right) = 200 \\ y^i = y^i\left(p_x^i, p_y, M\right) = 100 \end{cases} \\
(s) \Rightarrow \begin{cases} x^s = x^s\left(p_x^f, p_y, M^s\right) = 400 \\ y^s = y^s\left(p_x^f, p_y, M^s\right) = 50 \end{cases} \\
(f) \Rightarrow \begin{cases} x^f = x^f\left(p_x^f, p_y, M\right) = 800 \\ y^f = y^f\left(p_x^f, p_y, M\right) = 100 \end{cases}
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
ES_x^s = x^s - x^i = 200 \therefore ES_y^s = y^s - y^i = -50 \\
ER_x^s = x^f - x^s = 400 \therefore ER_y^s = y^f - y^s = 50 \\
ET_x^s = x^f - x^i = 600 \therefore E\cancel{R}_y^s = y^{\cancel{s}} - y^i = 0 \\
ET_x^s = ES_x^s + ER_x^s = 600 \therefore ET_y^s = ES_y^s - ER_y^s = 0
\end{array}\right.$$

Resumen

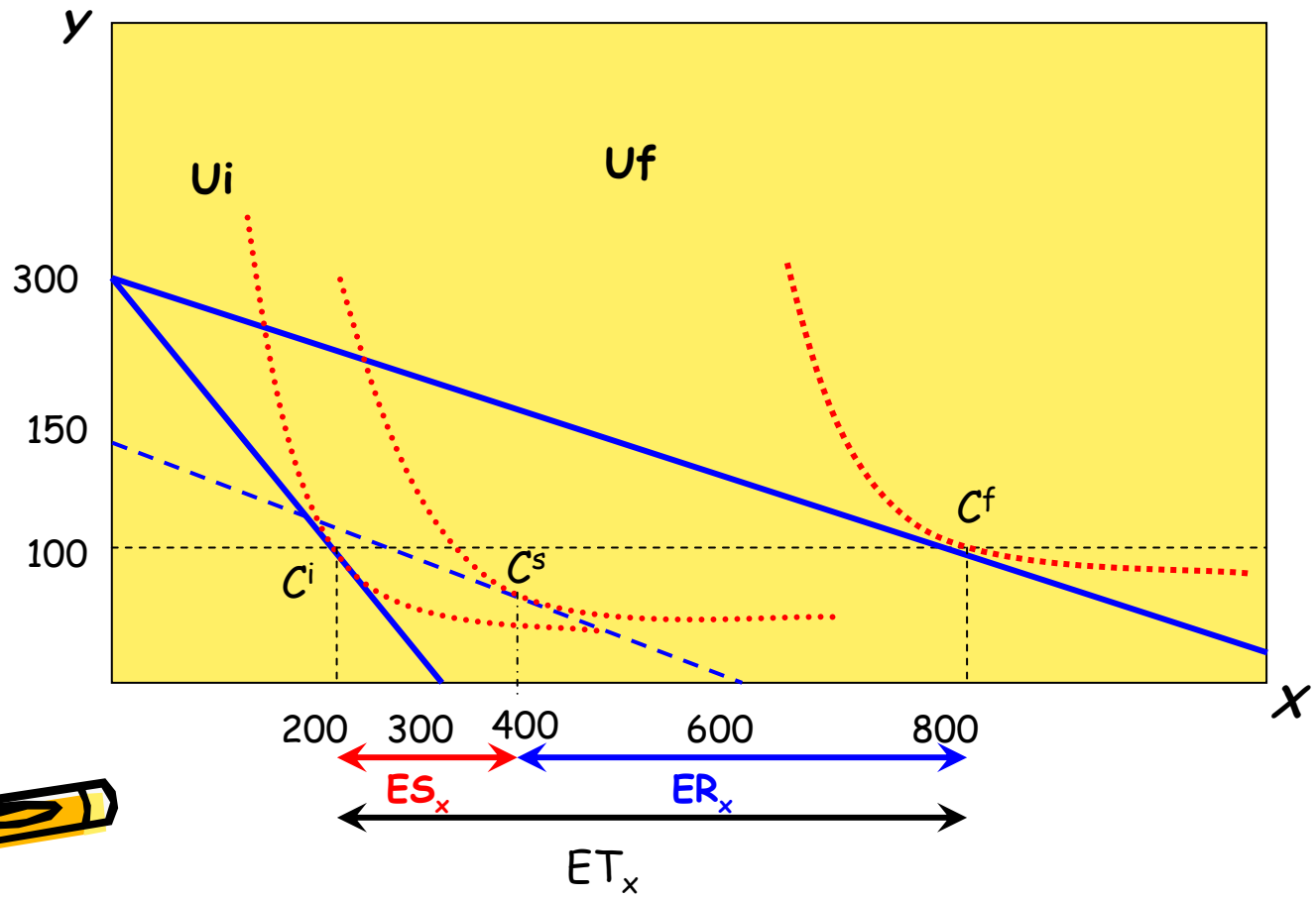
Situación Inicial (i)		
	X	*y*
Canastas	200	100
Precios	4	4
Ingreso		1.200
Utilidad		4.000.000

Situación Final (f)		
	X	*y*
Canastas	800	100
Precios	1	4
Ingreso		1.200
Utilidad		64.000.000

Situación Intermedia (s)		
	X	*y*
Canastas	400	50
Precios	1	4
Ingreso		600
Utilidad		8.000.000

Efecto Total		
	X	*y*
ER	400	50
ES	200	-50
ET	**600**	**0**

Gráficamente



Los ER y ES en Hicks

- Para la descomposición de Hicks del efecto sustitución (ES^H) y efecto renta (ER^H), ha de calcularse la mínima renta monetaria que llamaremos M^H, que permite a los precios finales (p_x^f, p_y) alcanzar el nivel de utilidad inicial ($U^i(X^i,Y^i)$).
- Si las preferencias son regulares, el valor buscado para MH deberá cumplir las siguientes condiciones.

$$(1)\quad U^i \equiv U\left(x^i, y^i\right) = U\left(x^H, y^H\right)$$

$$(2)\quad x^H = x^d\left(p_x^f, p_y, M^H\right)$$

$$(3)\quad y^H = y^d\left(p_x^f, p_y, M^H\right)$$

Los ER y ES en Hicks

- Alternativamente también se puede plantear como la solución de las condiciones

$$(1)\quad U^i \equiv U\left(x^i, y^i\right) = U\left(x^H, y^H\right)$$

$$(2)\quad \left|RMS\right| = \frac{p_x^f}{p_y}$$

$$(3)\quad p_x^f x + p_y y = M^H$$

- M^H debe ser tal que la elección óptima del consumidor para esa renta y los precios finales le reporte una utilidad igual a la que obtuvo en el equilibrio inicial (condición 1)

Compensación Hicks 1

Sustituyendo (2), (3) en (1) se obtiene una ecuación que permite obtener MH

$$U^i = U\left(x^d\left(p_x^f, p_y, M^H\right), y^d\left(p_x^f, p_y, M^H\right)\right) \Rightarrow M^H$$

La compensación necesaria para que el consumidor acceda a la utilidad inicial con los precios finales, ΔM^H, será:

$$\Delta M^H = M^H - M \Rightarrow \begin{cases} \Delta M^H \geq 0 \Leftrightarrow \Delta p_x \geq 0 \\ \Delta M^H \leq 0 \Leftrightarrow \Delta p_x \leq 0 \end{cases}$$

Cuando el precio aumenta habrá que compensarle dándole una renta monetaria adicional y si el precio disminuye, la compensación exigirá sustraer renta monetaria al consumidor

Compensación Hicks 2

Con los datos del problema, la renta necesaria para que el consumidor mantenga el nivel de utilidad inicial a los precios finales habrá de cumplir

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \ U^i \equiv 4*10^6 \\ (2)\ \ x^H = \dfrac{2M^H}{3p_x^f} = \dfrac{2M^H}{3} \\ (3)\ \ y^H = \dfrac{2M^H}{3p_y} = \dfrac{2M^H}{12}\end{array}\right\} \Rightarrow 4*10^6 = \left(\frac{2M^H}{3}\right)^2\left(\frac{2M^H}{12}\right) \Rightarrow M^H = 476{,}22 \Rightarrow \Delta M^H = -723{,}78$$

Al consumidor habría que sustraerle de su renta 723,78 u.m. para que, tras la reducción en el precio, mantuviese el nivel de utilidad inicial ($\Delta p_x<0 \Rightarrow \Delta M^s<0$)

$$\Delta M^H = 476{,}22 - 1200 = -723{,}78$$

Compensación Hicks 3

Para obtener la situación intermedia de Hicks basta con obtener la demanda óptima de los bienes en el caso hipotético en que el consumidor, para los precios finales, dispusiera de una renta M^H u.m.

$$x^H = \frac{2M^H}{3p_x^f} = \frac{2(476{,}22)}{3(1)} = 317{,}5$$

$$y^H = \frac{2M^H}{3p_y} = \frac{2(476{,}22)}{3(4)} = 39{,}7$$

Calculada la situación intermedia H, podemos descomponer el efecto total sobre el consumo en los efectos sustitución y renta.

$$ES_x^H = x^H - x^i = 317{,}5 - 200 = 117{,}5 \therefore ES_y^H = y^H - y^i = 39{,}7 - 100 = -60{,}3$$

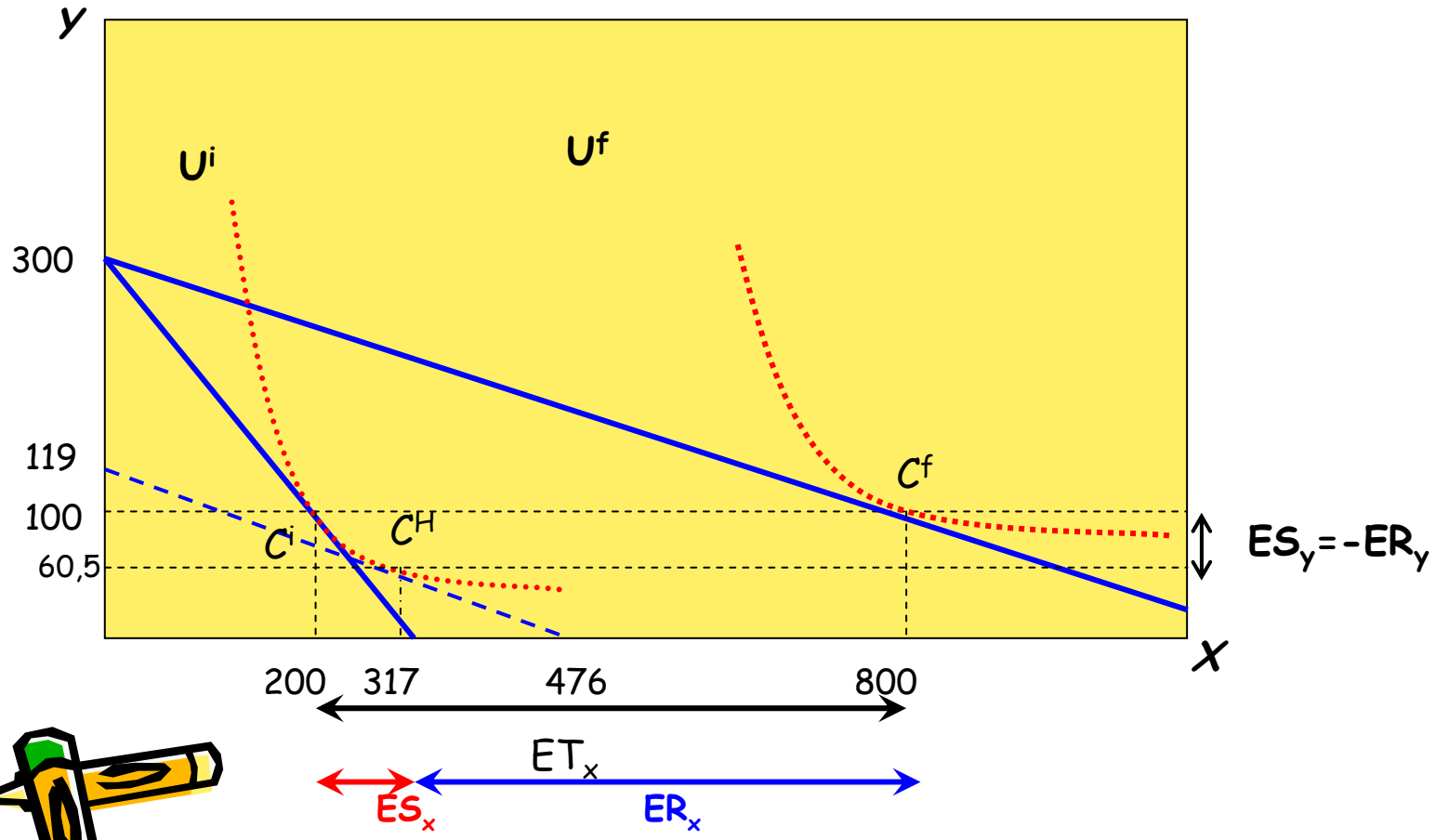
$$ER_x^H = x^f - x^H = 800 - 317{,}5 = 482{,}5 \therefore ER_y^H = y^f - y^H = 100 - 39{,}7 = 60{,}3$$

Resumen

Situación Inicial (i)				Situación Final (f)		
	X	*y*			*X*	*y*
Canastas	200	100		**Canastas**	800	100
Precios	4	4		**Precios**	1	4
Ingreso		1.200		**Ingreso**		1.200
Utilidad		4.000.000		**Utilidad**		64.000.000

Situación Intermedia (s)				Efecto Total		
	X	*y*			*X*	*y*
Canastas	317,4802	39,685025		**ER**	482,52	60,314975
Precios	1	4		**ES**	117,48	-60,314975
Ingreso		476,22		**ET**	**600**	**0**
Utilidad		4.000.000				

Gráficamente



La ecuación de Slutsky: Ejercicio

Microeconomía

Douglas Ramírez

EJERCICIO 3

El problema de optimización y la demanda individual

Un consumidor tiene una renta fija de **100** u.m. y la gasta en dos bienes, 1 y 2, cuyos precios son $\mathbf{P_1 = 6}$ u.m. y $\mathbf{P_2 = 8}$ u.m. Si su función de utilidad es $\mathbf{U = X1^{1/2}\, X2^{1/3}}$ donde X_1 y X_2 son las cantidades consumidas de cada bien.

1. Demuestre que maximiza su utilidad cuando compra **10** unidades del primer bien y **5** del segundo.

2. Para el consumidor del apartado anterior, calcule las funciones de demanda para el bien 1 y 2 para todos los niveles posibles de renta y precios.

3. Con los resultados anteriores, señale si X_1 y X_2 son bienes normales o inferiores.

4. Exprese gráfica y numéricamente qué sucedería con las cantidades de equilibrio si:

   a. Se duplica P_2
   b. Se duplica la renta monetaria
   c. Se duplican P_2 y la renta monetaria

5. Calcule el efecto sustitución y efecto renta bajo la aproximación de Hicks y de Slutsky en el caso de que se duplique el precio del bien 1.

6. Calcule la Variación compensatoria y equivalente en el caso de que se duplique el precio del bien 1. bajo la aproximación de Hicks y de Slutsky.

7. Calcule los índices de Laspeyres y Paasche.

8. Calcule el excedente del consumidor para el caso de que se duplique el precio del bien 1.

9. Calcule la función de demanda del mercado para el bien 1en el caso de que esté formado por 100 consumidores iguales.

EJERCICIO 4

Efectos sustitución y renta

En cierto ayuntamiento, la aportación anual de los vecinos para actividades deportivas (bien x) y culturales (bien y) es de 38 unidades monetarias (u.m.), siendo el precio medio unitario de cada una de estas actividades de 2 y 1 u.m., respectivamente. Si las preferencias de los vecinos entre deporte y cultura pueden representarse por la función de utilidad $U(x, y) = xy + y$:

1. Determine las funciones de demanda, así como el número de actividades deportivas y culturales, que deberá ofrecer el ayuntamiento si pretende maximizar la utilidad de los vecinos.

2. Suponga que el equipo de gobierno aprueba el llamado Plan de Fomento del Deporte (FD), de modo que subvenciona el 50% del precio de las actividades deportivas.

3. Descomponga y represente gráficamente el impacto sobre el consumo de las familias que ha tenido la política municipal en los efectos renta y sustitución de Slutsky y de Hicks.

4. Suponga ahora que por problemas financieros derivados de la implantación del plan FD el ayuntamiento decide desviar parte de la aportación de los vecinos para deporte y cultura a otras actividades. Utilizando los resultados obtenidos en los apartados anteriores, responda a las siguientes cuestiones:

   a. ¿Cuál sería el máximo trasvase presupuestario que los vecinos estarían dispuestos a aceptar para mantener el FD?

   b. ¿Cuál sería el máximo trasvase que permitiría a los vecinos consumir los niveles de actividades deportivas y culturales previas a la implantación del FD?

   c. ¿Cuál de los dos trasvases anteriormente calculados preferiría usted si fuera vecino de este municipio?