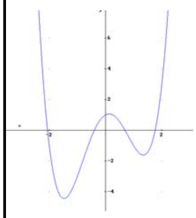
UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Métodos Cuantitativos en la Economía y la Gestión



Matemáticas Empresariales
Doble Grado en ADE y Derecho

Tema 1: Funciones reales de variable real

Profesora:
María Martel Escobar

OBJETIVOS

Objetivos **Generales**

Introducir el cálculo de funciones de una variable como fundamento del análisis económico marginal y los problemas de optimización.

Objetivos **Específicos**

- Conocer las funciones elementales y sus propiedades.
- Asimilar los conceptos fundamentales del cálculo diferencial y sus aplicaciones a problemas de economía.
- Adquirir destreza en el cálculo de límites, derivación e integración de funciones de una variable.

1

INDICE DE CONTENIDOS

2

---

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Definición

Una **función** es una correspondencia entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primer conjunto uno y sólo uno del segundo conjunto.

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

x: variable independiente,
y: variable dependiente.
Cuando $A, B \subseteq \mathbb{R}$, hablamos de función real de variable real.

3

---

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Dominio

Es el conjunto de puntos en los que tiene sentido su expresión matemática.
$f: A \to B,$
$x \to y = f(x)$. $\quad Dom(f) = A \subseteq \mathbb{R}$

Ejemplo: Obtener el dominio de las funciones,

a) $f(x) = x^2 + 1.$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}.$ c) $f(x) = \sqrt{x-1}.$

Solución:
a) $Dom(f) = \mathbb{R}.$ b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}.$ c) $Dom(f) = [1, +\infty).$

Gráfica:
Curva del plano dada por los puntos $(x, f(x))$.

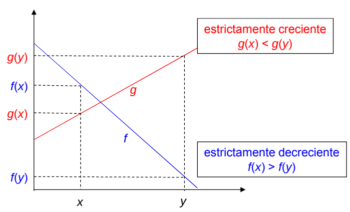
4

---

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Monotonía

Una función f es creciente (estrictamente) si $\forall x, y \in Dom(f)$, con $x < y$, se verifica que $f(x) \le f(y)$ ($f(x) < f(y)$).
Una función f es decreciente (estrictamente) si $\forall x, y \in Dom(f)$, con $x < y$, se verifica que $f(x) \ge f(y)$ ($f(x) > f(y)$).

Ejemplo:

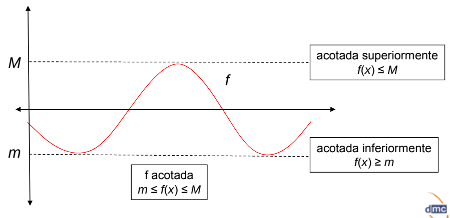


5

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Acotación

Una función *f* está acotada superiormente si existe un número real *M* tal que para $\forall x \in Dom(f)$ se verifica que $f(x) \leq M$.
Una función *f* está acotada inferiormente si existe un número real *m* tal que para $\forall x \in Dom(f)$ se verifica que $f(x) \geq m$.
Una función *f* está acotada si lo está superior e inferiormente.

Ejemplo:

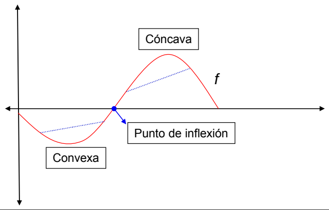


6

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Convexidad y concavidad

Una función *f* es convexa cuando el segmento que une dos puntos dados de su gráfica queda por encima de la gráfica (forma de $\cup$).
Una función *f* es cóncava cuando el segmento que une dos puntos dados de su gráfica queda por debajo de la gráfica (forma de $\cap$).
El punto donde una función pasa de cóncava a convexa o viceversa se llama punto de inflexión.

Ejemplo:



7

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Óptimos o extremos

Óptimos o extremos globales o absolutos:

Un punto x^* es un máximo global o absoluto de una función $f \Leftrightarrow f(x^*) > f(x),\ \forall x \in Dom(f)$.

Un punto x^* es un mínimo global o absoluto de una función $f \Leftrightarrow f(x^*) < f(x),\ \forall x \in Dom(f)$.

El valor de $f(x^*)$ es el valor máximo (o mínimo) de f en $Dom(f)$.

Óptimos o extremos locales o relativos:

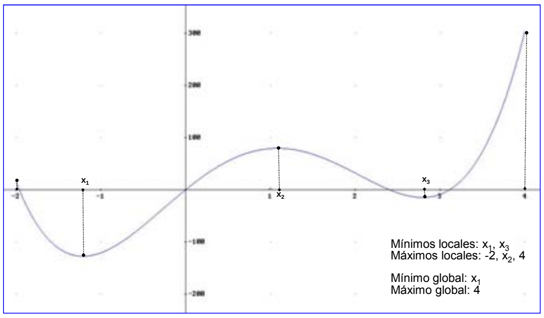
Un punto x_0 es un máximo local o relativo de una función $f \Leftrightarrow f(x_0) > f(x)$, en un entorno de x_0 (en los alrededores de x_0).

Un punto x_0 es un mínimo local o relativo de una función $f \Leftrightarrow f(x_0) < f(x)$, en un entorno de x_0 (en los alrededores de x_0).

8

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Óptimos o extremos

Ejemplo:



9

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Operaciones con funciones

Dadas $f: A \to \mathbb{R}, \quad x \to y = f(x).$ $\quad g: A \to \mathbb{R}, \quad x \to y = g(x).$

- Suma: $f(x) + g(x)$.
- Producto: $f(x) \cdot g(x)$.
- Cociente: $\dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$.
- Composición: $f: A \to B,\quad g: B \to C$ se define $g \circ f: A \to C$
  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ejemplo: Hallar la función resultante de componer las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$. Se tiene que $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$ y $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.

b) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Se tiene que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$.

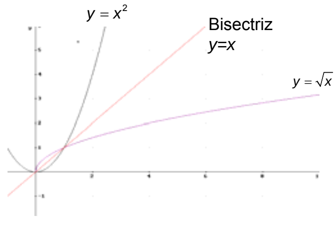
10

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Función inversa

Una función *f(x)* tiene inversa, si existe $f^{-1}(x)$ tal que:

$$f: A \to B,\quad f^{-1}: B \to A,$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x,\quad \forall x \in A.$$

Las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a la recta *y=x*.



11

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Función inversa

Ejemplo: Cálculo de la función inversa

Hallar la función inversa de las siguientes funciones.

a) $y = f(x) = 3x + 5.$

$$3x = y - 5 \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{3} = f^{-1}(y), \text{ luego } f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}.$$

b) $y = f(x) = x^2 + 1.$

$$x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} = f^{-1}(y), \text{ luego } f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}.$$

c) $y = f(x) = \dfrac{x}{x+1}.$

$$y(x+1) = x \;\Leftrightarrow\; yx - x = -y \;\Leftrightarrow\; x(y-1) = -y \;\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-y}{y-1} = \frac{y}{1-y} = f^{-1}(y), \text{ luego } f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}.$$

12

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

1. Función polinómica:

1. Grado 0,1 o lineal: $y=f(x) = ax+b$, $a,b \in \mathbb{R}$ (rectas).
2. Grado 2 o cuadrática: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ (parábolas).
3. En general, grado n: $y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

2. Función racional: $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ y $Q(x)$ polinómicas con $Q(x) \neq 0$.

3. Función potencial: $y = x^r$.

1. $r \in \mathbb{Z}$, polinómica o racional.
2. $r \in \mathbb{Q}$, radical.

4. Función exponencial: $y = f(x) = a^x$, $a > 0$.

1. Exponencial natural: $y = f(x) = e^x$.

5. Función logarítmica: $y = f(x) = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1. Logaritmo neperiano: $y = f(x) = lnx$.

13

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

1.1. Función polinómica de grado 0,1 ó lineal: $f(x) = ax+b$, $a,b \in \mathbb{R}$.
Se utiliza para representar fenómenos que varían (aumentan o disminuyen) de forma constante a lo largo del dominio.

Ejemplo previo (Modelo lineal de equilibrio)

➔Cuando los precios varían de forma constante a partir de las cantidades ofertadas y demandadas de un bien dado en el mercado, obtenemos funciones lineales de la oferta y la demanda. El precio de equilibrio es el punto en el que ambas funciones se cortan. En esta situación,

➔**Obtener** el precio de equilibrio asumiendo las siguientes condiciones:

- La demanda semanal de un producto es de 5 unidades cuando el precio es de 20 unidades monetarias por unidad, y de 10 unidades cuando el precio es de 15.
- El precio del productor (oferta) ha de cubrir unos costes fijos de 10 unidades y se incrementa en 2 unidades por cada unidad adicional que se produzca.

14

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

Solución:

La ecuación de demanda es la recta $p = aq + b$, que pasa por los puntos (5,20) y (10,15). Sustituyendo, queda:

$$\begin{cases} 20 = 5 \cdot a + b, \\ 15 = 10 \cdot a + b. \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 25 \Rightarrow p = -q + 25.$$

La ecuación de oferta es la recta $p = aq + b$, que pasa por el punto (0,10). Sustituyendo, queda: $10 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 10 \Rightarrow p = aq + 10.$

Además, por cada unidad adicional el precio aumenta en dos unidades: $12 = a \cdot 1 + 10 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow p = 2q + 10.$

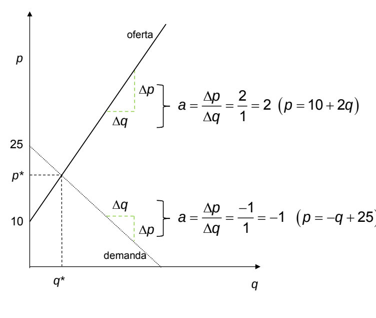
Por tanto, el punto de equilibrio del mercado vendrá dado por:

$$\begin{cases} p = 2q + 10 \\ p = -q + 25 \end{cases} \Rightarrow q = 5 \text{ y } p = 20 \Rightarrow (5,20).$$

15

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

Gráficamente:



16

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

En general: $f(x) = ax+b$, $a,b \in \mathbb{R}$.

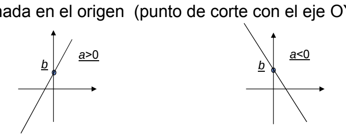
$Dom(f)=\mathbb{R}$. Gráfica: recta del plano.

a: pendiente de la recta $\left(a = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

a>0 recta creciente.

a<0 recta decreciente.

b: ordenada en el origen (punto de corte con el eje OY).



¿Qué ocurre en los casos a=0, b=0? Representar gráficamente.
¿Qué expresión corresponde a una recta vertical?
¿Qué ocurre si se tienen dos rectas $y=ax+b$ e $y=a'x+d$ con $a=a'$?

17

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

1.2. Función cuadrática: $f(x) = ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Se utiliza para representar fenómenos que experimentan un crecimiento hasta llegar a un máximo y luego decrecen (o al revés hasta llegar a un mínimo), y con comportamientos simétricos alrededor del máximo (o mínimo)

Ejemplo previo (Precio alojamiento en turismo rural)

Un estudio ha analizado el precio, p, (en €) de los alojamientos de turismo rural en la isla de La Palma obteniendo que se encuentra relacionado con la temperatura media de su entorno a través de la función cuadrática,

$p = -\frac{1}{8}t^2 + 5t$, donde es t la temperatura.

a) Representar gráficamente la función p.
b) Determinar cuál es la temperatura media que maximiza el precio. ¿Cuál es el mayor precio que se podría alcanzar?
c) Comparar los precios para las temperaturas de 10 y 30 grados.

18

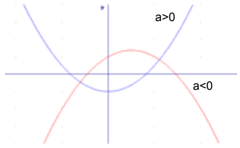
1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

En general: función cuadrática :

$f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.
Gráfica: parábola. $Dom(f)=\mathbb{R}$.

$a < 0$, es cóncava con máximo global en $x = -b/2a$.
$a > 0$, es cónvexa con mínimo global en $x = -b/2a$.

$x = -b/2a$, es el eje de simetría de la parábola.



19

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

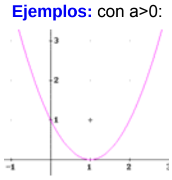
→**Puntos de corte con los ejes:**

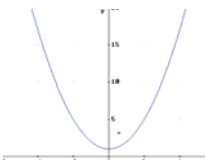
Eje vertical: $x = 0 \Rightarrow y = c$.

Eje horizontal: $y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \text{ un punto de corte (tangencia) con OX.} \\ b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \text{ dos puntos de corte con OX.} \\ b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \text{ no hay puntos de corte con OX.} \end{cases}$$

Ejemplos: con a>0:





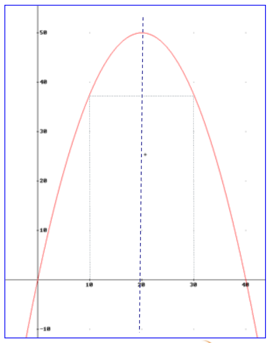
20

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

Ejemplo previo (Precio alojamiento en turismo rural). Solución:

$p = -\frac{1}{8}t^2 + 5t$, t, temperatura y p, precio.

a) El coeficiente de t^2 es negativo por lo que se trata de una parábola cóncava.
Los puntos de corte son (0,0) y (40,0).
El vértice: (20,50).
b) La temperatura que maximiza el precio es de 20º.
El precio máximo es de 50 €
c) Al ser una función simétrica con respecto al eje, los precios cuando la temperatura se incrementa o se reduce una misma cantidad son los mismos.



21

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

Aplicación (Función de ingresos).

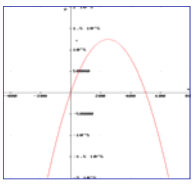
Dada una función de demanda lineal, $p = f(q) = b - aq$, $a,b > 0$

La función de ingresos será: $I(q) = (b - aq)q = bq - aq^2$, parábola cóncava.

Ejemplo:
Dada la función de demanda p = 1000-2q, calcular el nivel de producción que maximiza los ingresos, representar la función de ingresos e indicar dónde se alcanza el ingreso máximo.

Solución:
$I(q) = (1000 - 2q)q = 1000q - 2q^2$.

Puntos de corte: (0,0) y (500,0).
Máximo en: $q = -b/2a = 250 \Rightarrow$
$I(250) = 1000 \times 250 - 2 \times 250^2 = 125000$ u.m.



22

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

1.3. Función polinómica de grado n: $y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

$Dom(f)=\mathbb{R}$. Gráfica:

→ **Puntos de corte con los ejes:**

Con OY : $x = 0 \Rightarrow y = a_0 \Rightarrow (0,a_0)$.

Con OX : $y = 0 \Rightarrow a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow$ soluciones reales: $x_1, x_2, \ldots$
$\Rightarrow (x_1,0),(x_2,0),\ldots.$

→ **Signo del polinomio:** Basta calcular los puntos de corte con OX y evaluar en los intervalos que definen, teniendo en cuenta:
→multiplicidad impar ⇒ secante, cambio de signo,
→multiplicidad par⇒ tangente, no hay cambio de signo.

Ejemplo: $P(x) = (x+1)^2(x^2 - 5x + 4)$.

Las soluciones son: $x = -1$, doble (sin cambio de signo); $x = 1,4$, simples (con cambio).

$f(x) > 0$ $\quad -1 \quad$ 1 $\quad f(x) < 0 \quad$ 4 $\quad f(x) > 0$

23

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

2. Función racional:

$y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ y $Q(x)$ polinómicas con $Q(x) \neq 0$.

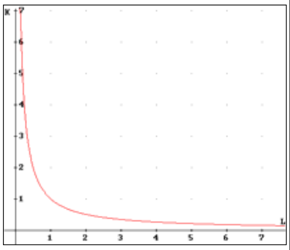
Ejemplo previo (Curvas Isocuantas):

Según el modelo de producción de Cobb Douglas, una representación de las combinaciones de capital (K) y trabajo (L) necesarias para producir una unidad de producto podría venir dada por la función:

$K = \dfrac{1}{L}$.

a)¿Qué cantidad de capital habría que invertir si se dispusiera de una unidad de trabajo?

b)¿Qué pasaría si se redujera las unidades de trabajo?¿Y si se aumentaran?



1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

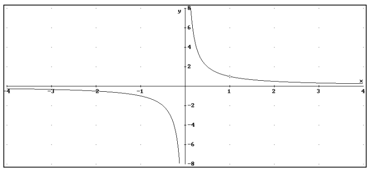
En general, función racional:

$y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ y $Q(x)$ polinómicas con $Q(x) \neq 0$.

Dom (f) = $\mathbb{R}$ - {x con $Q(x)$ = 0}.

Caso particular: $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Gráfica: Hipérbola equilátera.

Dom (f) = $\mathbb{R}$ - {0}.



1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

3. Función potencial: $y = f(x) = x^r$.

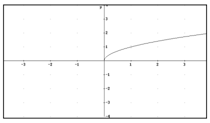
1. Si $r \in \mathbb{Z}$, se trata de funciones polinómicas o racionales.

2. Si $r \in \mathbb{Q}$, $r = p/q$ $\Rightarrow y = f(x) = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.

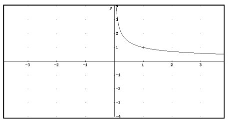
Dom (f): depende de los valores de p y de q.

Casos particulares:

$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$



1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

4. Función exponencial: $y = f(x) = a^x$, $a > 0$.

Ejemplo previo (Interés compuesto)

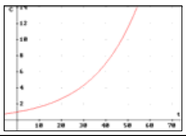
Supongamos que tenemos en el banco un capital de un millón de €. Determinar el capital que tendremos dentro de 10 años bajo los dos supuestos que se describen a continuación:

a)El capital crece en un 5% de interés anual.

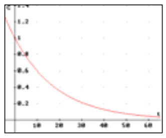
b)El capital se reduce por comisiones en un 5% anual.

t	0	1	2	3	…	10	$C(t)$ (millones)
a)	1 (1×1.05^0)	1.05 (1×1.05^1)	1.10 (1×1.05^2)	1.16 (1×1.05^3)	…	1.63 (1×1.05^{10})	(1×1.05^t)=$C(1+i)^t$
b)	1 (1×0.95^0)	0.95 (1×0.95^1)	0.90 (1×0.95^2)	0.86 (1×0.95^3)	…	0.60 (1×0.95^{10})	(1×0.95^t) =$C(1-i)^t$

a)



b)



1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

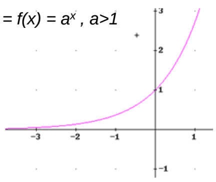
En general, función exponencial: $y = f(x) = a^x$, $a > 0$.

Dom (f) = $\mathbb{R}$; $f(x) > 0$, $f(0) = 1$.

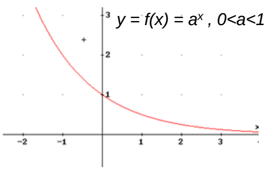
Gráfica: parte positiva de OY.

Creciente si a>1, decreciente si 0<a<1.

$y = f(x) = a^x$, a>1



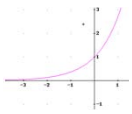
$y = f(x) = a^x$, 0<a<1



1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

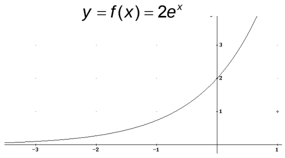
4.1 Caso particular: función exponencial natural $y = f(x) = e^x$.

$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 2.718281...$

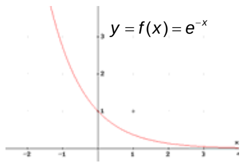


➜ <u>**El modelo exponencial**</u>: $y = f(x) = C\, e^{kx}$, (C y k son constantes).

$y = f(x) = 2e^x$



$y = f(x) = e^{-x}$



1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

5. Función logarítmica: $y = f(x) = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$\boxed{y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x}$

Es la inversa de la función exponencial.

Dom (*f*) = $\mathbb{R}^+$.

Gráfica: a la derecha de OX.

f(1)=0. Creciente si *a*>1. Decreciente si 0<*a*<1.

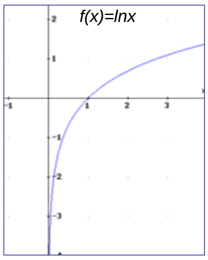
5.1 Caso particular:

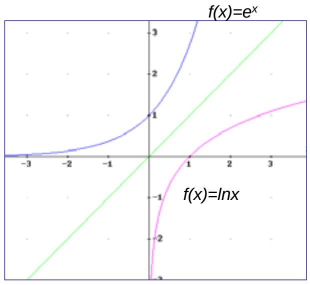
$a = e \Rightarrow y = f(x) = log_e x = log\ x = ln\ x = Lx$, función logaritmo neperiano.

30

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

Función logarítmica: Gráficas:





31

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Funciones elementales y sus gráficas

➜ **Propiedades de los logaritmos:**

$$ln\ 1 = 0 \qquad e^{lnx} = x \qquad ln\ e^x = x \qquad ln\ e = 1$$

$$ln\ (x \cdot y) = ln\ x + ln\ y \qquad ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln\ x - ln\ y \qquad ln\ x^n = n \cdot ln\ x$$

Ejemplos

a) Hallar la solución de la ecuación $e^{\ln 4x} = 4$.

$4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

b) Simplificar $\ln 27 - \ln 9$.

$\ln 27 - \ln 9 = \ln 3^3 - \ln 3^2 = 3\ln 3 - 2\ln 3 = \ln 3.$

c) Escribir en términos de $\ln x, \ln y$ y $\ln z$ la expresión $3 + \ln\frac{(xy)}{z}$.

$3 + \ln\frac{(xy)}{z} = 3 + \ln(xy) - \ln z = 3 + \ln x + \ln y - \ln z = \ln e^3 + \ln x + \ln y - \ln z.$

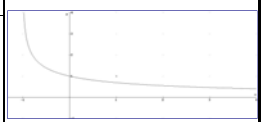
32

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Límites y continuidad

Ejemplo (idea intuitiva):

Sea $y = f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$, con $Dom\ f(x) = (-1,0) \cup (0,+\infty)$, ¿$\lim_{x\to 0} f(x)$?

$x<0$		$x>0$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0.1	1.053	0.1	0.953
-0.01	1.005	0.01	0.995
-0.001	1.0005	0.001	0.999
↓	↓	↓	↓
0	1	0	1



33

1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Límites y continuidad

➜El límite de una función permite estudiar el comportamiento de la misma en los alrededores de un punto $a \in \mathbb{R}$.

➜<u>El limite de una función *f* cuando *x* tiende a "*a*" es "*L*"</u>, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, cuando las imágenes de puntos próximos a "*a*" están próximas a "*L*", es decir: si x está en un entorno de "*a*" $\Rightarrow$ *f*(*x*) está en un entorno de "*L*".

➜El límite de una función es único.

➜Límites laterales: la aproximación al punto puede ser por la derecha o por la izquierda.

➜Límite por la derecha, $\lim_{x\to a^+} f(x)$, si nos acercamos al punto por valores mayores.

➜Límite por la izquierda, $\lim_{x\to a^-} f(x)$, si nos acercamos al punto por valores menores.

➜Como el límite es único, el límite existe si y sólo si existen los límites laterales y son iguales:

34

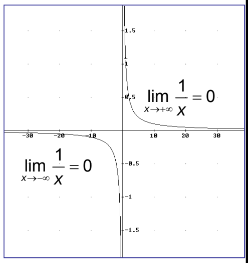
1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: Límites y continuidad

Límite en el infinito: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, si para valores elevados y positivos (negativos) de *x*, sus imágenes mediante *f* se acercan a *L*.

Ejemplo (idea intuitiva):

$y = f(x) = \dfrac{1}{x}$, $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$,¿ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$?

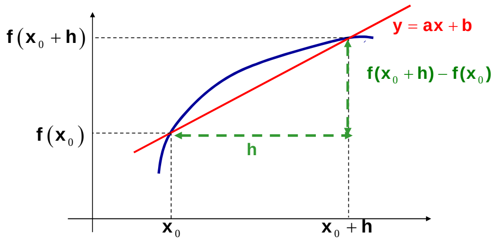
x	y	x	y
10	0.1	-10	-0.1
100	0.01	-100	-0.01
1000	0.001	-1000	-0.001
10^4	0.0001	-10^4	-0.0001
↓	↓	↓	↓
$+\infty$	0	$-\infty$	0



35

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: La derivada y la pendiente de la curva

Sea f: $A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A conjunto abierto (intervalo abierto o unión de intervalos abiertos). La pendiente de la recta secante a la curva y= f(x) es:

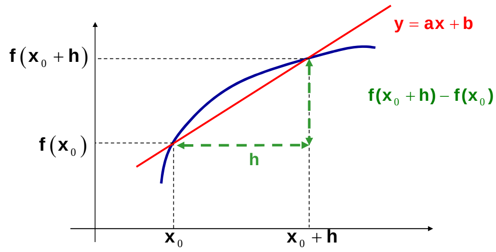


$$a = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: La derivada y la pendiente de la curva

La derivada y la pendiente de la curva

Sea f: $A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A conjunto abierto (intervalo abierto o unión de intervalos abiertos). La pendiente de la recta secante a la curva y= f(x) es:

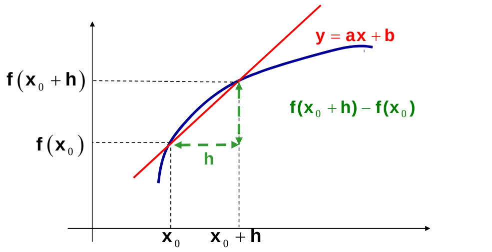


$$a = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: La derivada y la pendiente de la curva

La derivada y la pendiente de la curva

Sea f: $A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A conjunto abierto (intervalo abierto o unión de intervalos abiertos). La pendiente de la recta secante a la curva y= f(x) es:

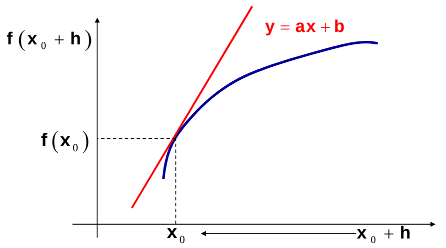


$$a = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: La derivada y la pendiente de la curva

La derivada y la pendiente de la curva

Sea f: $A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A conjunto abierto (intervalo abierto o unión de intervalos abiertos). La pendiente de la recta tangente a la curva y= f(x) es:



$$a = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} (= f'(x_0)).$$

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Definición y notación

Derivada de una función en un punto.

f: $A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A conjunto abierto, es derivable en x_0 si y sólo si existe y es finito $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

→En caso afirmativo, dicho límite se llama derivada de la función en x_0, y se expresa con cualquiera de las notaciones siguientes:

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

(O también: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$).

→f es derivable en su dominio si lo es en cada punto del mismo, a la función $y'=f'(x)$, se le llama función derivada de f.

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Interpretación

Interpretaciones de la derivada:

Sea f derivable en x_0,

- Geométricamente:

  $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, de ecuación: $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$

- Matemáticamente:

  La derivabilidad de una función da una idea de la "suavidad" del trazado de la curva.

- Físicamente:

  $f'(x)$ mide la velocidad (lentitud o rapidez) de variación de la función respecto a la variación de x (la variación de y respecto a x). $f'(x)$ se suele llamar la función marginal y $f'(x_0)$ representa la tasa de variación o razón de cambio de y respecto a x en x_0.

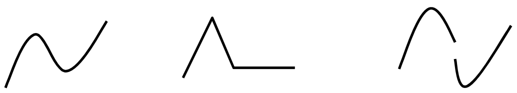
2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Continuidad y derivabilidad

Si $f(x)$ es derivable en $x_0 \Rightarrow f(x)$ es continua en x_0.

Consecuencias:

→Si $f(x)$ <u>no</u> es continua en $x_0 \Rightarrow f(x)$ <u>no</u> es derivable en x_0.

Resumen:



derivable — no derivable ("pico") — no derivable (no continua)

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Derivadas de funciones elementales

$f(x)=c \;\Rightarrow\; f'(x)=0,$

$f(x)=x^n \;\Rightarrow\; f'(x)=nx^{n-1},$

$f(x)=a^x \;\Rightarrow\; f'(x)=a^x \ln a,$

$f(x)=e^x \;\Rightarrow\; f'(x)=e^x,$

$f(x)=\ln x \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{x}.$

Ejemplos:

1) $f(x)=21 \qquad f'(x)=0.$

2) $f(x)=x \qquad f'(x)=1.$

3) $f(x)=x^2 \qquad f'(x)=2x.$

4) $f(x)=x^3 \qquad f'(x)=3x^2.$

5) $f(x)=x^4 \qquad f'(x)=4x^3.$

6) $f(x)=\frac{1}{x} \qquad f'(x)=-\frac{1}{x^2}.$

7) $f(x)=\frac{1}{x^5} \qquad f'(x)=\frac{-5}{x^6}.$

8) $f(x)=\sqrt{x} \qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

9) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad f'(x)=\frac{-2}{3x\sqrt[3]{x^2}}.$

10) $f(x)=3^x \qquad f'(x)=3^x \ln 3.$

11) $f(x)=\frac{1}{4^x} \qquad f'(x)=\frac{-\ln 4}{4^x}.$

12) Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\frac{1}{x^2}$ en el punto $x_0=1$.

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Reglas de cálculo de derivadas

→Si f y g funciones derivables, entonces, las siguientes funciones lo son, con:

→ $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x).$

→ $(c\cdot f)'(x)=c\cdot f'(x).$

→ $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$

→ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (siempre que $g(x)\neq 0$).

Ejemplos:

1) $f(x)=\frac{x^3}{4}-5e^x-\frac{2}{x} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{3x^2}{4}-5e^x+\frac{2}{x^2}.$

2) $f(x)=3x^4+7x^2-4\ln x \;\Rightarrow\; f'(x)=12x^3+14x-\frac{4}{x}.$

3) $f(x)=\frac{x^2e^x}{3} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x}{3}.$

4) $f(x)=\frac{x^2}{e^x} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{e^{2x}}$

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Aplicación

Ejemplo: Análisis marginal

Función de Coste	$C=f(q)$
Coste marginal	$\frac{dC}{dq}$
Coste medio	$\bar{C}=\frac{C}{q}$
Coste medio marginal	$\frac{d\bar{C}}{dq}$

Función de Ingresos	$I=g(q)$
Ingreso marginal	$\frac{dI}{dq}$
Función Beneficios	$B=I-C$
Beneficios marginales	$\frac{dB}{dq}$

Ejercicio: Hallar las funciones marginales de las siguientes funciones:

$C(q)=3e^q-2^q.$

$I(q)=2q^2-3q+1.$

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Regla de la cadena

→Dada la composición de funciones:

$$\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$$

$$x\longrightarrow f(x)\longrightarrow g(f(x))$$

$$x\longrightarrow (g\circ f)(x)$$

Si f y g son derivables $\Rightarrow$ $g\circ f$ es derivable, con, $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x).$

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Derivadas de funciones compuestas

Si $y=f(x)$ es derivable, las siguientes funciones lo son, con:

→ $g(x)=f(x)^n \;\Rightarrow\; g'(x)=nf(x)^{n-1}f'(x).$

→ $g(x)=e^{f(x)} \;\Rightarrow\; g'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x).$

→ $g(x)=a^{f(x)} \;\Rightarrow\; g'(x)=a^{f(x)}\cdot \ln a\cdot f'(x).$

→ $g(x)=\ln f(x) \;\Rightarrow\; g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$

Ejemplos:

1) $y=e^{x^2+1} \;\Rightarrow\; y'=2x\cdot e^{x^2+1}.$

2) $y=\left(x^2+2x\right)^3 \;\Rightarrow\; y'=3(x^2+2x)^2\cdot(2x+2).$

3) $y=\ln(x^4+1) \;\Rightarrow\; y'=\frac{4x^3}{x^4+1}.$

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Regla de la cadena (continuación)

→Otra notación:

Si $y=g(u),\ u=f(x)$, se tiene:

$$y \longrightarrow u \longrightarrow x \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 1

Dadas $y=u^2+5u$ y $u=3x^2+2x$. Hallar $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(2u+5)\cdot(6x+2) \quad =(2(3x^2+2x)+5)\cdot(6x+2).$$

→Si x = x_0 $\Rightarrow$ u = u_0 = f(x_0), por tanto, quedaría:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=u_0=f(x_0)}\cdot\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Ejemplo 2

Dadas $y=e^{u^2+2u}$ y $u=x^5+6x$. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $x=0$.

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Derivada de la función inversa

Si $y=f(x)$ es derivable en x_0, con $f'(x_0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\neq 0$, y existe su inversa, f^{-1},

$\Rightarrow f^{-1}$ es derivable en y_0, con: $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$, o también, $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=y_0}=\frac{1}{\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\right)}$,

donde, $y_0=f(x_0)$.

Ejemplo. Dada la ecuación de demanda, $p=3-200\sqrt{q}$,

a) Obtener la tasa de cambio de p respecto a q.

a) $\frac{dp}{dq}=-200\cdot\frac{1}{2}\cdot q^{-\frac{1}{2}}=\frac{-100}{\sqrt{q}}$.

b) Obtener la tasa de cambio de q respecto a p, para $p_0=1$.

b) Si $p_0=1=3-200\sqrt{q_0}\Rightarrow q_0=\frac{1}{10^4}$. Como $\left.\frac{dp}{dq}\right|_{q=q_0}=-10^4\neq 0\Rightarrow \left.\frac{dq}{dp}\right|_{p=p_0}=\frac{1}{-10^4}$.

2. DERIVABILIDAD. CÁLCULO DE DERIVADAS: Derivadas sucesivas

→Si $y=f(x)$ es derivable en su dominio, y la derivada, $y'=f'(x)$, también lo es, su derivada se denomina <u>función derivada segunda</u>, y se denota:

$$(f')'(x)=f''(x)=y''=\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

→Si $y''=f''(x)$, también es derivable, su derivada se denomina <u>función derivada tercera</u>, y se denota:

$$(f'')'(x)=f'''(x)=y'''=\frac{d^3f(x)}{dx^3}=\frac{d^3y}{dx^3}.$$

…

→En general, si $y=f(x)$ es n veces derivable, se denomina <u>derivada n-ésima de f o derivada de orden n de f</u> a la función que resultar de derivar n veces la función f ($n\in\mathbb{N}$), se denota por:

$$f^{(n)}(x)=y^{(n)}=\frac{d^nf(x)}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES

Se estudian las siguientes características de las funciones haciendo uso del cálculo de derivadas.

→ Monotonía (crecimiento y decrecimiento).

→ Extremos u óptimos (máximos y mínimos) locales o relativos.

→ Posibilidad de que sean extremos globales o absolutos.

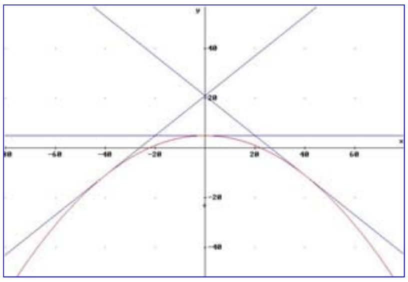
→ Concavidad y convexidad.

→ Puntos de inflexión.

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Monotonía y extremos locales

Ejemplo previo:

En la siguiente figura aparece la gráfica de una función f, y las rectas tangentes en $x=-40,0$ y 40. ¿Qué signo tienen $f'(-40)$, $f'(0)$ y $f'(40)$?



3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Monotonía y extremos locales

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivable en (a,b). Se tiene:

i) Si $f'(x)>0\Rightarrow f$ es creciente en (a,b).

ii) Si $f'(x)<0\Rightarrow f$ es decreciente en (a,b).

Consecuencia:

Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivable con derivada continua en (a,b), tiene un máximo o mínimo local (extremo u óptimo local o relativo) en $x^*\in(a,b)\Rightarrow f'(x^*)=0$.

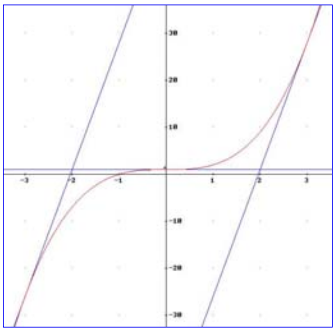
→ Los puntos que anulan la primera derivada de una función se llaman <u>puntos críticos</u> (recta tangente horizontal).

→ Los extremos locales de una función están entre los puntos críticos.

→ No todos los puntos críticos son extremos locales (puntos de inflexión).

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Monotonía y extremos locales

Ejemplo 1: No todos los puntos críticos son extremos locales.

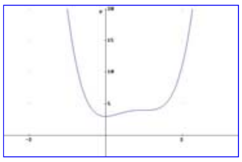


60

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Monotonía y extremos locales

Ejemplo 2: Hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos locales de $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 3$.

Solución: Puntos críticos: x=0; x=1.

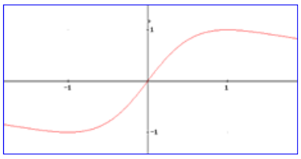


Ejemplo 3:

Ídem con $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Solución:

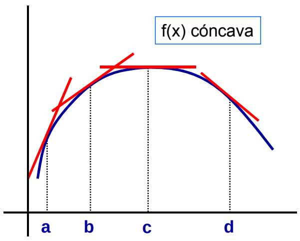
Puntos críticos: x= -1; x=1.

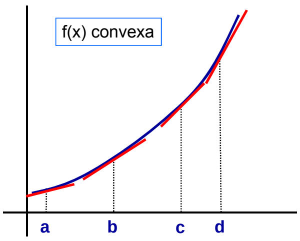


61

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Concavidad y convexidad

Ejemplo previo





f'(a)>f'(b)>f'(c)>f'(d)

f'(x) es decreciente (f''(x)<0)

f'(a)<f'(b)<f'(c)<f'(d)

f'(x) es creciente (f''(x)>0)

62

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Concavidad y convexidad

Sea $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, derivable dos veces en (a,b). Se tiene:

i) Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa en (a,b) (forma de $\cup$).

ii) Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en (a,b) (forma de $\cap$).

Consecuencia:

Si $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, derivable dos veces con derivadas continua en (a,b), tiene un punto de inflexión en $x^* \in (a,b) \Rightarrow f''(x^*) = 0$.

→ Los puntos de inflexión de una función están entre los puntos que anulan la segunda derivada.

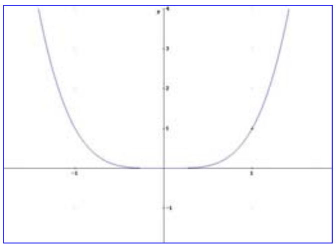
→ No todos los puntos que anulan la segunda derivada son puntos de inflexión.

63

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Concavidad y convexidad

Ejemplo : No todos los puntos que anulan la segunda derivada son puntos de inflexión.

$f(x) = x^4$ en $x = 0$.



64

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Clasificación de puntos críticos

Sea $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, derivable dos veces en (a,b) y sea $x^* \in (a,b)$ un punto crítico de f. Se tiene:

i)Si $f''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ es un mínimo local de f (f es convexa en un entorno de x^*).

ii)Si $f''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ es un máximo local de f (f es cóncava en un entorno de x^*).

Criterio general:

Sea $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, n veces derivable en (a,b) y sea $x^* \in (a,b)$ tal que, $f'(x^*) = f''(x^*) = f'''(x^*) = \cdots = f^{n-1)}(x^*) = 0$ y $f^{n)}(x^*) \neq 0$, entonces:

i) Si n es par y $f^{n)}(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ es mínimo local.

ii) Si n es par y $f^{n)}(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ es máximo local.

iii) Si n es impar $\Rightarrow x^*$ es punto de inflexión.

→ No todos los puntos de inflexión son puntos críticos, pero si lo son, la primera derivada que no anulan es de orden impar.

65

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES

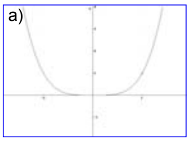
Ejemplos

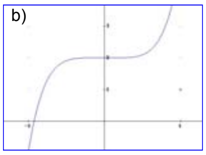
Calcular los puntos críticos y clasificarlos. Estudiar crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y adjuntar las gráficas.

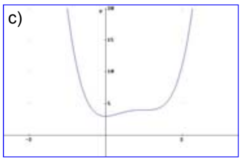
a) $f(x) = x^4$.

b) $f(x) = 3x^5 + 2$.

c) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 3$.







66

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Problemas de optimización

Aplicación : Resolución de problemas de optimización en una variable.

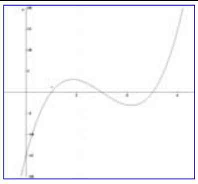
1. Se plantea la función a optimizar (función objetivo).
2. Se obtienen los óptimos o extremos locales de la función donde ésta sea derivable, para ello:
   - Se obtienen los puntos críticos y se clasifican (monotonía y signo de la segunda derivada o criterio general).
   - Se calcula el valor de la función en los extremos locales.
3. Se calcula el valor de la función en los puntos en los no sea derivable (por ejemplo, en los extremos de un intervalo cerrado, en puntos de discontinuidad o en picos), y se compara con el valor obtenido en los extremos locales.
4. Se estudia, mediante límites, si la función está o no acotada (es decir, si su valor no tiende a ∞).
5. Se establecen conclusiones sobre la existencia de óptimos o extremos globales según lo obtenido en los pasos anteriores.

67

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Problemas de optimización

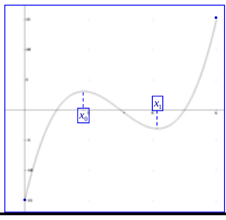
Ejemplo 1: Hallar los óptimos de las funciones siguientes.

1a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$, en $\mathbb{R}$.



→Sólo hay óptimos locales, que no son globales porque la función no está acotada $\left(\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\right)$.

1b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$, en $[0,6]$.



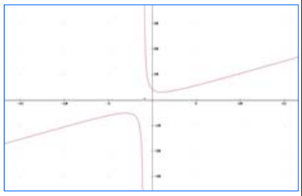
→Los óptimos locales no son globales, pero la función tiene óptimos globales en los extremos del intervalo.

68

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Problemas de optimización

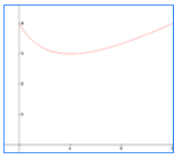
Ejemplo 2: Ídem con:

2a) $f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$, en $\mathbb{R}$.



→Sólo hay óptimos locales, que no son globales porque la función no está acotada $\left(\lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = \pm\infty\right)$.

2b) $f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$, en $[0,3]$.



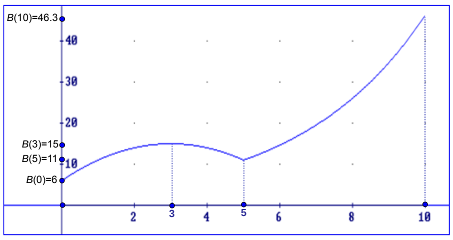
→El mínimo local es global, y el máximo global está en los extremos del intervalo.

69

3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES: Problemas de optimización

Ejemplo 3: Obtener los extremos de la función de beneficios:

$$B(q) = \begin{cases} -(q-3)^2 + 15, & 0 \le q \le 5, \\ 11 \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^{q-5}, & 5 < q \le 10. \end{cases}$$



70

4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES: La integral indefinida

$F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$, si se verifica que $F'(x)=f(x)$.

Ejemplo 1

$F(x) = 3x^2 + 2x + k$ es función primitiva de $f(x) = 6x + 2$, ya que $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo 2: Hallar la primitiva de $f(x) = 6x+2$ que pasa por el punto (1,1).

$F(1) = 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + k = 1 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow F(x) = 3x^2 + 2x - 4.$

→El conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ se llama **integral indefinida**, y se escribe:

$$\int f(x)dx = F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{para} \quad F'(x) = f(x).$$

Propiedades: Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int \alpha\, f(x)dx = \alpha \int f(x)$$
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

71