E.T.S.I.T.
PRIMER CURSO
CÁLCULO – FEBRERO – 9 horas
CONVOCATORIA ORDINARIA
Profesores A. Plaza y K. Sadarangani

SOLUCIÓN

1.- Resolver la ecuación $\cos 3z = 3$.

Como $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, la ecuación equivale a: $\dfrac{e^{3iz}+e^{-3iz}}{2} = 3$, donde haciendo el cambio $e^{3iz} = T$, resulta $\dfrac{T+\frac{1}{T}}{2} = 3$, es decir $T^2 - 6T + 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son: $T = 3 \pm \sqrt{3}$, que son dos números reales positivos. Por tanto, $e^{3iz} = 3 \pm \sqrt{3}$, y tomando logaritmos neperianos tenemos:

$$3iz = \ln\left(3 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi i \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2k\pi}{3} - i\frac{\ln\left(3 \pm \sqrt{3}\right)}{3} \qquad \square$$

2.- Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Hallar $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$, $\operatorname{Ext}\mathbb{Z}$, y $\operatorname{Fr}\mathbb{Z}$.

Como el conjunto $\mathbb{Z}$ es de puntos aislados, resulta que $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \varnothing$, $Fr\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, y, por último, como el interior, el exterior y la frontera son conjuntos disjuntos cuya unión es el total, se tiene que $Ext\mathbb{Z} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. $\square$

3.- Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^3 + e^{3/2} + \ldots + e^{3/n}}{\cos(\pi/4) + \cos(\pi/5) + \ldots + \cos(\pi/(4+n))}$.

Llamemos L al límite pedido. Mediante el criterio de Stolz resulta:

$L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{3/n}}{\cos(\pi/(4+n))}$. Por tanto, $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{3/n}}{\cos(\pi/(4+n))} = \dfrac{e^0}{\cos(0)} = 1$ $\square$

4.- Hallar los valores de a para los que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(a+2)^{2n}}{3^n}$ es convergente.

Por el criterio del cociente, $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|\dfrac{(a+2)^{2n}}{3^n}\right|}{\left|\dfrac{(a+2)^{2n-2}}{3^{n-1}}\right|} = \left|\dfrac{(a+2)^2}{3}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a+2)^2 < 3$

Es decir que la serie es convergente siempre que $|a+2| < \sqrt{3}$, es decir para $a \in \left(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}\right)$. Estudiemos ahora los casos para $L = 1$, que corresponden a los valores de a que cumplen $|a+2| = \sqrt{3}$, o lo que es lo mismo $a = -2-\sqrt{3}$ y $a = -2+\sqrt{3}$:

Para $a = -2-\sqrt{3}$, resulta la serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2-\sqrt{3}+2)^{2n}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{3})^{2n}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$$ que es divergente.

Lo mismo ocurre en el otro extremo del intervalo. Por tanto el conjunto de convergencia de la serie dada es $\left(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right)$ □

5.- Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Continuidad: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^6\cos^3\alpha\,\mathrm{sen}^3\alpha}{r^2}=0$, que coincide con el valor de la función en el origen, y así la función es continua en el origen.

Existencia de derivadas parciales. Basta aplicar la definición para hallar que ambas derivadas parciales son cero en el origen.

Diferenciabilidad. Se evalúa el siguiente límite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f\left(h,k\right)-f\left(0,0\right)-0h-0k}{\sqrt{k^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^3k^3}{\left(\sqrt{k^2+k^2}\right)^{3/2}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^6\cos^3\alpha\,\mathrm{sen}^3\alpha}{r^{3/2}}=0$$

y por tanto la función es diferenciable en el origen. □

6.- Demostrar que el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} xz^3+yu+2x=1\\ 2xy^3+u^2z+2y=2\end{array}\right\}$$

define a x y a y como funciones implícitas $x=x(z,u)$ e $y=y(z,u)$ de z y u, en un entorno de $P_0(z_0,u_0,x_0,y_0)=P_0(0,1,0,1)$. Hallar además, el plano tangente a la superficie $x=x(z,u)$ en un entorno del punto P_0.

Veamos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

1) $\left.\begin{array}{r} 0\cdot 1^3+1\cdot 1+2\cdot 0=1\\ 2\cdot 0\cdot 1^3+1^2\cdot 0+2\cdot 1=2\end{array}\right\}$; 2) Las derivadas parciales de las funciones que aparecen en el sistema son continuas, por ser polinomios,

3) Vemos el determinante jacobiano respecto de las funciones implícitas en el punto:

$$\begin{vmatrix} z^3+2 & u\\ 2y^3 & 2\end{vmatrix}_{(0,1,0,1)}=\begin{vmatrix} 0^3+2 & 1\\ 2\cdot 1^3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

Luego se verifica el teorema de la función implícita.

Para hallar el plano tangente a la superficie $x=x(z,u)$ en el punto P_0, necesitamos las derivadas parciales de *x* respecto de *z* y de *u*, que son:

$$\frac{\partial x}{\partial z}(P_0)=\frac{-\begin{vmatrix}3xz^2 & 1\\ u^2 & 2\end{vmatrix}_{P_0}}{2}=\frac{-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2};\ \frac{\partial x}{\partial u}(P_0)=\frac{-\begin{vmatrix}y & 1\\ 2uz & 2\end{vmatrix}_{P_0}}{2}=\frac{-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}}{2}=-1$$

Así pues el plano tangente pedido tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix}z-0 & u-1 & x-0\\ 1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=0 \iff -z+2u+2x=2 \qquad \square$$

7.- En la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, cambiar las variables independientes x e y por u y v, dadas por $\begin{matrix}u=ax+ay\\ v=ax-ay\end{matrix}$, $con\ a>0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial u}-a\frac{\partial z}{\partial v}$$

Donde derivando de nuevo respecto de x y respecto de y se tiene:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$, y sustituyendo en la ecuación dada, resulta: $4a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$ $\square$

8.- Hallar los extremos relativos de $f(x,y)=2x^2-4xy+y^4-1$

Hallamos primero los puntos críticos:

$$\left.\begin{matrix}\frac{\partial f}{\partial x}=4x-4y=0\\ \frac{\partial f}{\partial x}=-4x+4y^3=0\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\to\ x=y\\ \to\ x=0,\ x=1,\ x=-1\end{matrix}\Bigg\}$$ De donde los puntos críticos son

$(0,0),(1,1),(-1,-1)$. La matriz hessiana resulta $H=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -4 & 12y^2\end{pmatrix}$

En $(0,0)$, $H=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -4 & 0\end{pmatrix}$ tiene determinante negativo, por lo que tenemos un punto de silla.

En $(1,1)$, $H=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -4 & 12\end{pmatrix}$ tiene determinante positivo y $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1)=4>0$, por lo que tenemos un mínimo relativo.

En $(-1,-1)$, $H=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -4 & 12\end{pmatrix}$ tiene determinante positivo y $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1)=4>0$, por lo que tenemos un mínimo relativo. $\square$