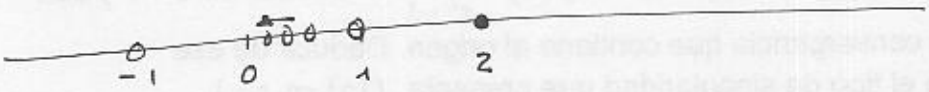
1 $\ln(z+w) = \ln(4) \rightarrow \begin{cases} z+w=4 \\ z\cdot w = 8 \end{cases}$ $\quad w = 8/z$, $\quad z + \frac{8}{z} = 4$

$z^2 - 4z + 8 = 0$

$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = \begin{cases} 2+2i \\ 2-2i \end{cases} \rightarrow w = \frac{8}{z}$

$w = \frac{8}{2 \pm 2i} = \begin{cases} 2-2i \\ 2+2i \end{cases}$ #

2 $A = (-1, 2] - \{ \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \}$



a) $0 \notin \mathring{A}$ xq $\forall$ entorno de 0 q es un ejto de la forma $(-r, r) \not\subset A$ pues $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

b) $0 \notin \text{Ext}\, A$ xq $\forall$ entorno de 0 : $(-r, r)$ $(-r, r) \cap A \supset (-r, 0) \neq \emptyset$ con lo q $\nexists$ entorno de 0 contenido en $\complement A$.

c) $0 \notin \text{Ais}(A)$ porque x ej. $\{\frac{-1}{n}\} \subset A$ & $\frac{-1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

d) $0 \in \bar{A}$ porque $0 \in A$ y $A \subset \bar{A}$. #

3 a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} \overset{\text{Stolz}}{=}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1} = 1 - (k+1)\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{(k+1)k}{2}\frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\Rightarrow 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1} = (k+1)\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{(k+1)k}{2}\frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\& \quad L = \lim \frac{1}{n} \frac{1}{(k+1)\frac{1}{n} - \frac{(k+1)k}{2}\frac{1}{n^2} + \dots} = \boxed{\frac{1}{k+1}} \quad \#$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{2^n} x^n$ centrada en $x=0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 \ln n}{2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$$

$I \supset (-2, 2)$

Para $x = 2$ la serie resulta: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{2^n} 2^n$

cuyo término gral es $n^2 \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow$ es DVTE.

Para $x=-2$ la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \ln n$$

Como $|(-1)^n n^2 \ln n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ la serie NO es CVTE

y así el intervalo pedido es $I = (-2, 2)$ #

4 Continuidad.

Estudiemos el límite en $(0,0)$ mediante coordenadas polares:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\alpha + \rho\,\text{sen}\,\alpha)^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}(\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)^2}{\cancel{\rho^2}} =$$

$$= (\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)^2$$

Como depende de $\alpha \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y así f no es cont. en $(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2}-0}{h} = \infty$$

luego no tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Análogamente para $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. #

5 Taylor de 3er grado de $f(x,y) = e^{2x+y} + 2x + y$

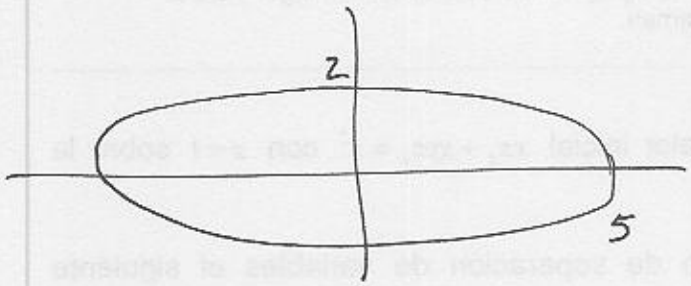
Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ entonces

$$e^{2x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+y)^n}{n!}$$ y así el polinomio

pedido es $$P_3(x,y) = \sum_{n=0}^{3} \frac{(2x+y)^n}{n!} + 2x + y =$$

$$= 1 + 4x + 2y + \frac{(2x+y)^2}{2} + \frac{(2x+y)^3}{6}$$ #

6 La curva $4x^2+25y^2=100$ es una elipse centrada en $(0,0)$ con los ejes sobre los ejes de coordenadas y semieje mayor 5 y semieje menor 2:



Por tanto los puntos de la elipse con distancia mayor y menor al origen son respectivamente $(5,0)$ $(-5,0)$ y $(0,2)$ $(0,-2)$ siendo estas distancias 5 y 2. Este resultado también se puede obtener por multiplicadores de Lagrange.

7
$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

Derivando resp. de y en el sistema, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \cos\alpha\,\dfrac{\partial r}{\partial y} - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\dfrac{\partial \alpha}{\partial y} \\ 1 = \mathrm{sen}\,\alpha\,\dfrac{\partial r}{\partial y} + r\cos\alpha\,\dfrac{\partial \alpha}{\partial y} \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -r\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ 1 & r\cos\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix}} = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\alpha}{r} = \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 1 \end{vmatrix}}{r} = \frac{\cos\alpha}{r}$$

Por tanto $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$ equivale a:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial r} \operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{r} = 0}$$

#