SOLUCIÓN

(1.0 pto) **1.-** Resolver la ecuación: $\left(\operatorname{sen}(z)+2\right)^2-\left(\operatorname{sen}(z)-2\right)^2=0$.

Sea $\operatorname{sen} z = w$. Entonces la ecuación queda:

$$\left(w+2\right)^2-\left(w-2\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad w^2+4w+4-w^2+4w-4=0 \quad\rightarrow\quad w=0$$

Por tanto $\operatorname{sen} z = 0 \Rightarrow z = k\pi,$ con $k \in Z$. □

(1.0 pto) **2.-** Dada una sucesión de números reales, definir punto de aglomeración de la sucesión y punto límite. Hallar los puntos de aglomeración y los puntos límites de la sucesión definida por $\{x_n\}=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{2n},\ \text{con } n\in N\right\}$.

Dada una sucesión $\{x_n\}$, se dice que x es de aglomeración de $\{x_n\}$ si en cualquier entorno de x hay infinitos puntos de $\{x_n\}$. Por otro lado x es el límite de $\{x_n\}$, si en cualquier entorno de x, están todos los elementos de $\{x_n\}$, excepto un número finito de ellos.

Como $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n \text{ par}}}(-1)^n+\dfrac{1}{2n}=1;\quad \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n \text{ impar}}}(-1)^n+\dfrac{1}{2n}=-1$, entonces

$-1,1$ son los únicos puntos de aglomeración de la sucesión, y ésta no tiene límite. ○

(1.5 pto) **3.-** Hallar el radio y el campo de convergencia de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}(x-3)^n$.

Para calcular el radio de convergencia calculamos el

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}=e$$

, por tanto el radio de convergencia es $R=1/e$. De donde, el conjunto de convergencia contiene al intervalo $\left(3-\dfrac{1}{e},3+\dfrac{1}{e}\right)$, por ser la serie centrada en $x=3$.

Para $3+\dfrac{1}{e}$ resulta la serie numérica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!e^n}$

Usando Stirling, resulta que el término general es

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!e^n}=\frac{n^n}{n!e^n}\approx\frac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

Y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ es divergente (por la armónica generalizada). Por tanto la serie de partida también es divergente.

Para $3-\frac{1}{e}$ resulta la serie numérica alternada: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!e^n}(-1)^n$

Nótese que el valor absoluto del término general ($\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$) tiende a cero, y por tanto es convergente.

Por tanto el intervalo de convergencia pedido es $\left[3-\frac{1}{e},3+\frac{1}{e}\right)$. ○

(1.0 pto) **4.-** Hallar $\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\sqrt{2}+\cdots+(n+1)\sqrt[n]{n}}{n^2+n-1}$.

Por Stolz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\sqrt{2}+\cdots+(n+1)\sqrt[n]{n}}{n^2+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt[n]{n}}{n^2+n-1-\left[(n-1)^2+(n-1)-1\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt[n]{n}}{2n}=\frac{1}{2}$$

Nótese que $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Por tanto la solución es $\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\sqrt{2}+\cdots+(n+1)\sqrt[n]{n}}{n^2+n-1}=\frac{1}{2}$ ○

(1.5 pto) **5.-** Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}, & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

La función no es continua en el origen como puede comprobarse, tras usar infinitésimos equivalente, porque los límites direccionales dependen de la dirección:

$$\frac{xy}{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}\approx\frac{xy}{x^2+y^2};\quad \lim_{\substack{x\to0\\ y=mx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{mx^2}{x^2\left(1+m^2\right)}=\frac{m}{1+m^2}$$

y por tanto la función no es diferenciable en el origen. Para hallar las derivadas parciales en el origen, mediante la definición, se obtiene fácilmente que ambas son cero. ○

(2.0 pto) **6.-** Dado el sistema $\left.\begin{array}{r}x+y-z-u=1\\ x^2-y^2+z-u^3=-1\end{array}\right\}$

a) Probar que en un entorno del punto $P_0\left(x_0,y_0,z_0,u_0\right)=(1,0,-1,1)$, este sistema define a z y a u como funciones implícitas de x e y.

b) Comprobar que en un punto genérico (x, y, z, u) se verifica que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

La parte **a)** es aplicación directa del teorema de la función implícita.
Para la parte **b)** mediante determinantes jacobianos:

$u_x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2u^2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2x-1}{2u^2-1}; u_y = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2u^2 \end{vmatrix}} = \dfrac{2y-1}{2u^2-1}$. Basta ahora derivar respecto de x e y, respectivamente en $u_x\left(2u^2-1\right) = -2x-1; u_y\left(2u^2-1\right) = 2y-1$, para comprobar la igualdad. ○

(2.0 pto) **7.-** Hallar los extremos relativos de la distancia al origen de coordenadas de un punto $P(x, y)$ que recorre la curva de ecuación $x^3 - y^3 = 1$.

Por el método de los multiplicadores de Lagrange, sea la función auxiliar:

$W = x^2 + y^2 + \lambda\left(x^3 - y^3 - 1\right)$. Resolvemos el sistema formado por las derivadas parciales igual a cero junto con la condición:

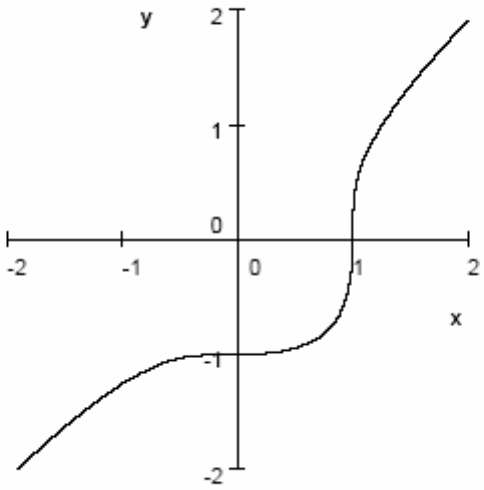
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial W}{\partial x} = 2x + 3\lambda x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial y} = 2y - 3\lambda y^2 = 0 \\ x^3 - y^3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0; \lambda = \dfrac{-2}{3x} \\ y = 0; \lambda = \dfrac{-2}{3y} \end{array}\right\}$$

De donde se deducen los puntos críticos:

$A = (0, -1)$ con $\lambda = \dfrac{-2}{3}$, $B = (1, 0)$ con $\lambda = \dfrac{-2}{3}$, $C = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ con $\lambda = \dfrac{-2\sqrt[3]{2}}{3}$:

Como $H = \begin{pmatrix} 2+6\lambda x & 0 \\ 0 & 2-6\lambda y \end{pmatrix}$, para $A = (0, -1)$ con $\lambda = \dfrac{-2}{3}$: $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, luego hay $|H| = -4 < 0$, y en ese punto hay un punto de silla. Para $B = (1, 0)$ con $\lambda = \dfrac{-2}{3}$:

$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, luego hay $|H| = -4 < 0$, y en ese punto hay un punto de silla. Finalmente, para $C = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ con $\lambda = \dfrac{-2\sqrt[3]{2}}{3}$, $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, como $|H| = +4 > 0$, y $-2 < 0$ en ese punto hay un máximo local. Lo encontrado está de acuerdo con la gráfica de la curva $x^3 - y^3 = 1$:



O