UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Matemáticas

E.T.S.I.T.
PRIMER CURSO
CÁLCULO – 20.06.08– 09.00 horas
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

SOLUCIONES

(1.5 p) **1** Expresar en forma binómica dos números complejos z y w tales verifiquen las dos condiciones siguientes: a) El valor principal de $\ln(z+w)=\ln(2)$; b) El número $1+i$ es una de las raíces de $\sqrt{z\cdot w}$.

Tomando logaritmos neperianos resulta: $z+w=2$. La segunda condición implica que $(1+i)^2=z\cdot w$, es decir $z\cdot w=2i$. Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta: $z=1\pm\sqrt{1-2i}$; $w=1\mp\sqrt{1-2i}$. Además se puede hallar la raíz cuadrada en forma binómica y emplear su valor para dar una expresión explícita de z y w:

$$\sqrt{1-2i}=\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}i\right).$$

○

(1.5 p) **2** Sea $A=(-1,1]-\left\{\frac{1}{n},\text{ con n }\in\mathbb{N}\right\}$. Encontrar, razonadamente $\overset{\circ}{A}$, Ext$A$, FrA, Aisl$A$, y $\overline{A}$.

Es conveniente dar las definiciones de los conjuntos que se piden, y así justificar el resultado:

$$\overset{\circ}{A}=(-1,1]-\left\{\frac{1}{n},\text{ con n }\in\mathbb{N}\right\},\ \text{Ext}A=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\ \text{y Fr}A=\left\{-1,0,\frac{1}{n},\text{ con n }\in\mathbb{N}\right\}$$

○

(2.0 p) **3 a)** Hallar el límite siguiente: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{2\pi}}{1}+\frac{2^2\sqrt{4\pi}}{2}+\frac{3^3\sqrt{6\pi}}{3!}+\cdots+\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{n!}}{e^{n+1}}$.

Por Stolz: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{2\pi}}{1}+\frac{2^2\sqrt{4\pi}}{2}+\frac{3^3\sqrt{6\pi}}{3!}+\cdots+\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{n!}}{e^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{n!}}{e^{n+1}-e^n}$.

Ahora usando Stirling:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{n!}}{e^{n+1}-e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{e^n(e-1)}=\frac{1}{e-1}.$$

Por tanto la solución es $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{2\pi}}{1}+\frac{2^2\sqrt{4\pi}}{2}+\frac{3^3\sqrt{6\pi}}{3!}+\cdots+\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{n!}}{e^{n+1}}=\dfrac{1}{e-1}$. ○

b) Hallar el intervalo de convergencia de la $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 \ln n}{\pi^n} x^n$.

Para calcular el radio de convergencia calculamos el

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2 \ln n}{\pi^n}}{\frac{(n-1)^2 \ln(n-1)}{\pi^{(n-1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\pi \ln(n-1)} = \frac{1}{\pi}$, por tanto el radio de convergencia es $R = \pi$. De donde, el conjunto de convergencia contiene al intervalo $(-\pi, +\pi)$, por ser la serie centrada en $x = \pi$.

Para $x = \pi$ resulta la serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 \ln n}{\pi^n} \pi^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \ln n$.

Como el término general en valor absoluto no tiende a cero, la serie es divergente.

Para $x = -\pi$ resulta la serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln n$.

Nótese que el término general no tiende a cero por lo que la serie es divergente.

Por tanto el intervalo de convergencia pedido es $(-\pi, +\pi)$. ○

(1.5 p) **4** Estudiar en el origen y en función de los valores del parámetro k ($k > 0$) la continuidad y la existencia de derivadas parciales de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^k}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad empleamos la expresión en polares del límite:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^{2k} (\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha)^k}{r^2}$. Para que sea continua el límite anterior ha de ser igual a 0, y por tanto $k \geq 1$.

Para hallar la derivada parcial respecto de *x* en el origen utilizamos la definición:

$\frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0}{h}}{h} = 0$. Y lo mismo ocurre para la otra derivada parcial. ○

(1.5 p) **5** Hallar el polinomio de Taylor de tercer grado de la función $f(x,y) = e^{2x+y} + x - y$ en $(a,b) = (1,-1)$.

Basta usar la fórmula para el polinomio de Taylor, obteniéndose:

$$P_3(x,y)=e+(2e+1)x+(e-1)y+2ex^2+2exy+\frac{e}{2}y^2+$$
$$+\frac{8ex^3+12ex^2y+6exy^2+ey^3}{6}$$

(1.0 p) **6** Hallar los extremos relativos de la distancia al origen de coordenadas de un punto $P(x,y)$ que recorre la curva de ecuación $x^2-y^2=4$.

Como la distancia de un punto (x,y) al origen viene dada por la expresión $\sqrt{x^2+y^2}$ y la función $y=x^2$ es creciente para valores positivos del argumento, por el método de los multiplicadores de Lagrange, consideramos la función auxiliar:

$W=x^2+y^2+\lambda\left(x^2-y^2-4\right)$. Resolvemos el sistema formado por las derivadas parciales igual a cero junto con la condición:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial W}{\partial x}=2x+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial W}{\partial y}=2y-2\lambda y=0\\ x^2-y^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x=0,\quad o\quad \lambda=-1\\ y=0,\quad o\quad \lambda=+1\\ x^2-y^2=4\end{array}\right\}$$

$x=0\quad\Rightarrow\quad -y^2=4,$ que es imposible

$y=0\quad\Rightarrow\quad x^2=4\quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$

Es decir los puntos críticos son: $A=(2,0)$, $B=(-2,0)$, con $\lambda=-1$.

Como la matriz hessiana resulta $H=\begin{pmatrix}2+2\lambda & 0\\ 0 & 2-2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, entonces $d^2W(0,0)=4dy^2$, y teniendo en cuenta la relación entre las variables ($x^2-y^2=4$) se tiene que es definida positiva, y por en los dos puntos se tiene un mínimo local. ○

(1.0 p) **7** Si z es una función de variables x e y, obtener la expresión de $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ al cambiar las variables x e y por r y α si $x=e^r\cos\alpha$, $y=e^r\operatorname{sen}\alpha$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}$. Para hallar $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}$ se puede derivar implícitamente el sistema respecto de x:

$$\left\{\begin{array}{l}1=\dfrac{\partial r}{\partial x}e^r\cos\alpha-e^r\operatorname{sen}\alpha\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\\ 0=\dfrac{\partial r}{\partial x}e^r\operatorname{sen}\alpha+e^r\cos\alpha\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\end{array}\right\}$$. Ahora por Crammer, se tiene

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} e^r & -e^r \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & e^r\cos\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^r\cos\alpha & -e^r\operatorname{sen}\alpha \\ e^r\operatorname{sen}\alpha & e^r\cos\alpha \end{vmatrix}}=\frac{e^{2r}\cos\alpha}{e^{2r}}=\cos\alpha;$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} e^r\cos\alpha & e^r \\ e^r\operatorname{sen}\alpha & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^r\cos\alpha & -e^r\operatorname{sen}\alpha \\ e^r\operatorname{sen}\alpha & e^r\cos\alpha \end{vmatrix}}=\frac{-e^{2r}\operatorname{sen}\alpha}{e^{2r}}=-\operatorname{sen}\alpha$$

Y por tanto $\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\cos\alpha-\frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\operatorname{sen}\alpha=0$ ○

Las notas se publicarán en Internet el día 23 de junio:
http://geminis.dma.ulpgc.es/~aplaza/ficheros/calc_calificaciones.htm

Revisión exámenes: miércoles 25 de 9 a 10 horas – Despacho 39 Edif. Matemáticas e Informática