Yesenia Da Silva Jiménez

(10)

$$z^w = (\ln i)^{\pi i} = e^{w \cdot \ln z} = e^{\pi i (\ln(\ln i))} \quad (I)$$

$$\ln i = \cancel{\ln 1}^{\,0} + (\pi/2 + 2k\pi) i = (\pi/2 + 2k\pi) i$$

usando la determinación principal del logaritmo obtenemos para $k=0$:

$$\ln i = \pi/2 \, i$$

<u>Sustituyendo a continuación en (I):</u>

$$z^w = e^{\pi i (\ln(\pi/2 \, i))} \quad (II)$$

<u>Resolvamos $\ln(\pi/2 \, i)$:</u>

$\ln(\pi/2 \, i) = \ln \pi/2 + (\pi/2 + 2k\pi) i$, de donde usando la determinación principal obtenemos:

$$\ln(\pi/2 \, i) = 0'45 + \pi/2 \, i$$

<u>Sustituyendo en (II):</u>

$$z^w = e^{\pi i (0'45 + \pi/2 \, i)} = e^{\left(0'45\pi i + \left(-\frac{\pi^2}{2}\right)\right)} = e^{-\frac{\pi^2}{2} + 0'45\pi i} = \underbrace{e^{-\frac{\pi^2}{2}}}_{\text{MODULO}} \cdot e^{\boxed{0'45\pi i}}$$

de aquí obtenemos el argumento

<u>MÓDULO DEL NÚMERO COMPLEJO</u> $\equiv \left|(\ln i)^{\pi i}\right| = \dfrac{1}{e^{\frac{\pi^2}{2}}} = \boxed{7{,}19 \cdot 10^{-3}}$

<u>ARGUMENTO DEL NÚMERO COMPLEJO</u> $\equiv \operatorname{Arg}\left((\ln i)^{\pi i}\right) = 0'45\pi = \boxed{1'41}$

(20)

$A = (0,1) \cup \{ \frac{n+1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \}$ ¿$\mathring{A}$, Ext A, Fr A, Aisl A y $\bar{A}$?

Estudiemos inicialmente la sucesión $\{ \frac{n+1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \} = \{a_n\}$

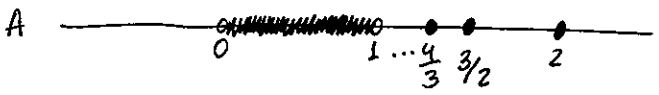
·) para $n=1$; $a_n \to 2$

·) para $n=2$; $a_n \to \frac{3}{2} = 1'5$

·) para $n=3$; $a_n \to \frac{4}{3} = 1'33$

⋮

vemos que la sucesión tiende a 1.



$\mathring{A}$ (conjunto abierto) : es el mayor intervalo abierto (o conjuntos de intervalos abiertos) de puntos interiores. Un punto interior es aquel cuyo entorno está contenido en A.

En este caso : $\boxed{\mathring{A} = (0,1)}$

Ext A (Exterior de A) : es el interior de A^c (A complementario), notar que $A^c = \mathbb{R} - A$.

En este caso : $\boxed{\text{Ext}(A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) - \{ \frac{n+1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \}}$

Fr A (Frontera de A) : son los puntos o conjuntos de puntos, en cuyo entorno se encuentran puntos de A y de A^c.

En este caso : $\boxed{\text{Fr}(A) = \{0,1\} \cup \{ \frac{n+1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \}}$

Aisl A (Aislados de A) : son aquellos puntos a en los que en su entorno el único punto perteneciente a A es a.

En este caso : $\boxed{\text{Aisl}(A) = \{ \frac{n+1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \}}$

Yasmia Da Silva Jiménez

$\bar{A}$ (Adherencia de A): es el menor conjunto cerrado (o unión de conjuntos cerrados) de puntos adherentes. Estos puntos son aquellos que cumplen que dado un punto a, su entorno verifica la expresión $(a-r, a+r) \cap A \neq \emptyset$ con $r>0$.

$$\bar{A} = \mathring{A} \cup Fr A$$

$$\boxed{\bar{A} = [0,1] \cup \left\{ \frac{n+1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \right\}}$$

(3º) (a) Hallar el límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{3^2}{2^1}+\dots+\frac{(n+1)^n}{n^{(n-1)}}}{n^2} \underset{\text{aplicando stolz}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{(n-1)}}}{n^2-(n-1)^2} =$$

$$\left| \begin{array}{l} n^2-(n-1)^2 = \\ n^2-(n^2-2n+1) = \\ = n^2-n^2+2n-1 = \\ = 2n-1 \end{array} \right.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{(n-1)}}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{(2n-1)\,n^{(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot n^{-1}(2n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\substack{\downarrow \\ 1^\infty \\ \downarrow \\ e}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{2n-1}\right)}_{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{e}{2}}$$

Resolvemos la indeterminación 1^∞:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-n}{n}\right)\cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}} = e$$

3) b) Intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$$

Se trata de una serie de potencias centrada en $x=0$ y de coeficientes

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$\downarrow$

Modificando este término general:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2+2n+n+2} = \frac{1}{n^2+3n+2}$$

Calculemos el radio de convergencia R:

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{1}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt[n]{n^2+3n+2}}_{\to 1}} = 1$$

raíz n-ésima de un polinomio siempre tiende a 1

Por tanto, $R=1$

El intervalo de convergencia de la serie será al menos: $(-1, 1)$

Estudiemos los extremos:

① $\boxed{\text{Para } x=-1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3n+2}$ Se trata de una serie alternada, por lo que, podemos aplicar el criterio de Leibnitz.

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+3n+2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = 0$ (se cumple la primera condición)

la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2+3n+2}\right\}$ es decreciente, y por tanto, por Leibnitz podemos asegurar que para $x=-1$ la serie converge.

Yosenia Da Silva Jiménez

③ $\boxed{\text{Para } x=1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n^2+3n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$$

Para calcular el carácter de esta serie, podemos comparar con la armónica generalizada: $\frac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{n^2+3n+2} < \frac{1}{n^2}$$

Como $\frac{1}{n^2}$ es CONVERGENTE, sabemos por el criterio de comparación que $\frac{1}{n^2+3n+2}$ también será CVTE.

Finalmente, el intervalo de convergencia de la serie original será $\underline{\underline{[-1,1]}}$.

(4°)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>CONTINUIDAD</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\operatorname{sen}^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta)}{r^2} =$$

Sustituyo por coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$$= \lim_{r\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{r} \cdot \underbrace{(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta)}_{\text{acotado}} = \underline{\underline{0}}$$

Como el límite de la función tendiendo al punto es igual al valor de la función en dicho punto, la función es <u>continua</u>.

DERIVADAS PARCIALES

Aplicamos la definición de derivadas parciales:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k^3}{k^2}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k} = \boxed{1}$$

Las derivadas parciales existen y ambas son 1.

DIFERENCIABILIDAD

Una función es diferenciable en $(0,0) \Longleftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\ell(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

donde $\ell(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k = h+k$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2} - 0 - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2} - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

sustituyo por coordenadas polares $\begin{cases} h = r\cos\theta \\ k = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{r^3(\cos^3\theta+\text{sen}^3\theta)}{r^2} - r[\cos\theta+\text{sen}\,\theta]}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{r^3(\cos^3\theta+\text{sen}^3\theta) - r^3[\cos\theta+\text{sen}\,\theta]}{r^2}}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}\,[(\cos^3\theta+\text{sen}^3\theta)-(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)]}{\cancel{r^3}} =$$

$$= (\cos^3\theta+\text{sen}^3\theta) - (\cos\theta+\text{sen}\,\theta) \neq 0$$

Por tanto, como el límite anterior es distinto de cero, la función no es diferenciable.

Yosenia Da Silva Jiménez

(5°) Polinomio de Taylor de tercer grado de $f(x)=\operatorname{sen} x+e^x$ en $a=0$ y escribir el término complementario.

$f(x)=\operatorname{sen} x+e^x$; $f(0)=1$

$f'(x)=\cos x+e^x$; $f'(0)=2$

$f''(x)=-\operatorname{sen} x+e^x$; $f''(0)=1$

$f'''(x)=-\cos x+e^x$; $f'''(0)=0$

$f^{IV)}(x)=\operatorname{sen} x+e^x$

$$\boxed{P_3(x)=1+2x+\frac{x^2}{2}+\frac{(\operatorname{sen}(c)+e^c)\,x^4}{4!}}$$

(donde c está entre 0 y x)

(6°) (a) Extremos relativos de la función: $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0 \longrightarrow 3x^2=3y$

$\boxed{x^2=y}$ (I)

$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0$

$\downarrow$

Sustituyendo (I) en esta expresión obtenemos:

$3(x^2)^2-3x=0$

$3x^4-3x=0$

$3x(x^3-1)=0$ $\boxed{x=0}$

$x^3=1$

$x=\sqrt[3]{1}=1 \rightarrow \boxed{x=1}$

Sustituyendo estos valores en (I) determinamos los puntos críticos:

•) Si $x=0 \rightarrow y=0$; $A=(0,0)$

•) Si $x=1 \rightarrow y=1$; $B=(1,1)$

La matriz Hessiana que se obtiene es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$

$$H = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

•) Para $A=(0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$|H| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0-9 = -9 < 0 \rightarrow$ Por tanto, en $\underline{A=(0,0)}$ hay un <u>PTO DE SILLA</u>

•) Para $A=(1,1)$

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$|H| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36-9 = 27 > 0$ y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0 \rightarrow$ en $\underline{B=(1,1)}$ hay un <u>MÍNIMO LOCAL</u>

La matriz Hessiana se define positiva

b) Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ si las variables están relacionadas por la condición $x^2+y^2=1$

Aplicamos los multiplicadores de Lagrange, considerando la función auxiliar $\boxed{W(x,y) = x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-1)}$

Yesenia Da Silva Jiménez

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2x + 2\lambda x \longrightarrow 2x + 2\lambda x = 0$$

$$2x(1+\lambda) = 0 \quad \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \text{ó} \\ \boxed{\lambda=-1} \end{cases}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = -2y + 2\lambda y$$

$$x^2+y^2=1 \ (*) \longrightarrow -2y+2\lambda y=0$$

$$2y(-1+\lambda)=0 \quad \begin{cases} \boxed{y=0} \\ \text{ó} \\ \boxed{\lambda=1} \end{cases}$$

•) Si $x=0$

Sustituyendo en $(*)$

$y^2=1$

$y=\pm\sqrt{1} \rightarrow \boxed{y=\pm 1}$ con $\boxed{\lambda=1}$

•) Si $y=0$

Sustituyendo en $(*)$

$x^2=1$

$\boxed{x=\pm 1}$ con $\boxed{\lambda=-1}$

Por tanto, los puntos críticos son:

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,1) \\ B=(0,-1) \end{array}\right\} \text{con } \lambda=1$$

$$\left.\begin{array}{l} C=(1,0) \\ D=(-1,0) \end{array}\right\} \text{con } \lambda=-1$$

Para determinar los máximos y los mínimos podemos tener en cuenta la siguiente condición:

Como la función $f(x,y)=x^2-y^2$ es continua y el conjunto $x^2+y^2=1$, es un conjunto cerrado y acotado, el teorema de Weierstrass asegura que la función alcanza en este conjunto el máximo y el mínimo.

Por esta razón, sustituyendo los puntos críticos directamente en la función y estudiando su valor podemos encontrar la solución.

$f(A) = f(0,1) = -1$

$f(B) = f(0,-1) = -1$

$f(C) = f(1,0) = 1$

$f(D) = f(-1,0) = 1$

Como $f(A) = f(B) < f(C) = f(D)$

en $\underline{A = (0,1) \text{ y } B = (0,-1)}$ tenemos dos <u>MÍNIMOS</u>

y en $\underline{C = (1,0) \text{ y } D = (-1,0)}$ tenemos dos <u>MÁXIMOS</u>

(7º) $z = f(x,y)$ obtener $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ al cambiar x e y por r y α si

$$x = e^r \cos\alpha \longrightarrow f(x,y,r,\alpha) = x - e^r\cos\alpha$$
$$y = e^r \operatorname{sen}\alpha \longrightarrow g(x,y,r,\alpha) = y - e^r \operatorname{sen}\alpha$$

Notar que: $\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}}$

Hemos de calcular: $\frac{\partial r}{\partial y}$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$

Sabemos que:

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial y}} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial \alpha} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \alpha} \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & e^r \operatorname{sen}\alpha \\ 1 & -e^r\cos\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^r\cos\alpha & e^r\operatorname{sen}\alpha \\ -e^r\operatorname{sen}\alpha & -e^r\cos\alpha \end{vmatrix}} = \frac{+e^r\operatorname{sen}\alpha}{e^{2r}\cos^2\alpha + e^{2r}\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{e^r\operatorname{sen}\alpha}{e^{2r}} = \boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{e^r}}$$

$$\frac{e^r}{e^{2r}} = e^{r-2r} = e^{-r} = \frac{1}{e^r}$$

$$\boxed{\frac{\partial \alpha}{\partial y}} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}}{e^{2r}} = \frac{-\begin{vmatrix} -e^r\cos\alpha & 0 \\ -e^r\operatorname{sen}\alpha & 1 \end{vmatrix}}{e^{2r}} = \frac{e^r\cos\alpha}{e^{2r}} = \boxed{\frac{\cos\alpha}{e^r}}$$

Finalmente, $\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{e^r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\alpha}{e^r}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0}$