UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Matemáticas

E.T.S.I.T.
PRIMER CURSO
CÁLCULO – 28.01.08– 09.00 horas
CONVOCATORIA ORDINARIA

SOLUCIONES

1 Hallar todas las soluciones de la ecuación $3i = \operatorname{sen} z$.

$\operatorname{sen}(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3i \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = -6$. Hacemos $e^{iz} = T$, y la ecuación resulta: $T - T^{-1} = -6 \Rightarrow T^2 + 6T - 1 = 0$, cuyas soluciones son:

$T = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+4}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -3 \pm \sqrt{10}$, de donde

$iz = \ln\left(-3+\sqrt{10}\right) = \ln\left(-3+\sqrt{10}\right) + (2k\pi)i$, y también

$iz = \ln\left(-3-\sqrt{10}\right) = \ln\left(3+\sqrt{10}\right) + (\pi + 2k\pi)i$ con k un número entero. Despejando z se obtiene la solución:

$\boxed{z = 2k\pi - i\ln\left(-3+\sqrt{10}\right),\ z = \pi + 2k\pi - i\ln\left(3+\sqrt{10}\right)}$, con k un nº entero. ○

2 Sea $A = [-1,0) \cup \left\{\dfrac{1}{n}, \text{con n } \in \mathbb{N}\right\}$. Hallar, razonadamente $\overset{\circ}{A}$, Ext$A$, FrA, Aisl$A$, y $\overline{A}$.

$\overset{\circ}{A} = (-1,0)$, $\operatorname{Ext}A = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty) - \left\{\dfrac{1}{n}, \text{con n } \in \mathbb{N}\right\}$,

$\operatorname{Fr}A = \{-1,0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n}, \text{con n } \in \mathbb{N}\right\}$, $\operatorname{Aisl}A = \left\{\dfrac{1}{n}, \text{con n } \in \mathbb{N}\right\}$,

y $\overline{A} = [-1,0] \cup \left\{\dfrac{1}{n}, \text{con n } \in \mathbb{N}\right\}$ ○

(1.5 p) **3 a)** Hallar el límite siguiente: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{1} + \frac{4^2}{2} + \frac{5^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+2)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$

Por Stolz: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{1} + \frac{4^2}{2} + \frac{5^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+2)^n}{n^{n-1}}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)^n}{n^{n-1}}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n-1} \frac{(n+2)^{n-1}}{n^{n-1}}$.

Nótese que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n-1} = \frac{1}{2}$; $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{n-1}}{n^{n-1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}-1\right)(n-1)} = e^2$.

Por tanto la solución es $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{1} + \frac{4^2}{2} + \frac{5^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+2)^n}{n^{n-1}}}{n^2} = \frac{e^2}{2}}$ ○

(1.5 p) **3 b)** Hallar el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Para calcular el radio de convergencia calculamos el

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = e$, por tanto el radio de convergencia es

$R = \frac{1}{e}$. De donde, el conjunto de convergencia contiene al intervalo $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$, por ser la serie centrada en $x = 0$.

Para $x = \frac{1}{e}$ resulta la serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$.

Para estudiar esta serie aplicamos el criterio necesario:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n} = L$. Para hallar L, tomamos logaritmos neperianos:

$\ln L = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - n = \lim_{n\to\infty} n\left(n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1\right)$, que, por el desarrollo de Taylor de la función $y = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$, con $x = \frac{1}{n}$, resulta:

$\ln L = \lim_{n\to\infty} n\left(n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} - \cdots\right) = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto

$L = e^{-\frac{1}{2}} > 0$. Luego la serie es divergente.

Para $x = -\frac{1}{e}$ resulta la serie numérica alternada: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{-1}{e}\right)^n$.

Como el límite del valor absoluto del término general es $e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$ la serie no es convergente. Por tanto el intervalo de convergencia pedido es $\boxed{\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)}$. ○

(2.0 p) **4** Estudiar en el origen la continuidad, derivadas direccionales y diferenciabilidad de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+2y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La función es continua en el origen como puede comprobarse pues el límite en polares resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+2y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\alpha}{r^2\left(\cos^2\alpha+2r\operatorname{sen}^2\alpha\right)} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha+2r\operatorname{sen}^2\alpha} = 0$$

Para hallar las derivadas direccionales en el origen utilizamos la definición de derivada direccional:

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^3\cos^3\alpha}{t^2\cos^2\alpha+2t^2\operatorname{sen}^2\alpha}}{t} = \frac{\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Finalmente, para estudiar la diferenciabilidad, necesitamos las derivadas parciales en el origen, que, por lo anterior son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)} f(0,0) = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)} f(0,0) = 0.$$

Ahora calculamos si el siguiente límite es cero (será diferenciable) o no:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\dfrac{r^3\cos^3\alpha}{r^2\left(\cos^2\alpha+2r\operatorname{sen}^2\alpha\right)} - r\cos\alpha}{r} =$$

$\lim_{r\to 0} \dfrac{\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha+2r\operatorname{sen}^2\alpha} \neq 0$, y por tanto no es diferenciable en el origen. ○

5 Hallar el polinomio de Taylor de tercer grado de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ en $a = 0$, y escribir el término complementario.

Usando la fórmula del polinomio de Taylor y del resto se obtiene la solución:

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{\operatorname{sen} c + \cos c}{4!} x^4, \text{ con } c \text{ entre } 0 \text{ y } x.$$

6 a) Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$.

Imponiendo la condición necesaria se obtiene sólo un punto crítico, el origen. Y estudiando la matriz hessiana, resulta ser un mínimo local. ○

6 b) Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ siendo $x^2 + y^2 = 1$.

Por el método de los multiplicadores de Lagrange, consideramos la función auxiliar: $W = x^2 - y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$. Resolvemos el sistema formado por las derivadas parciales igual a cero junto con la condición:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial W}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial y} = -2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x(1+\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \ y = \pm 1;\ \lambda = 1 \\ \lambda = -1 & \Rightarrow \ y = 0 \end{cases} \\ 2y(-1+\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 & \Rightarrow \ \mathrm{x} = \pm 1;\ \lambda = -1 \\ \lambda = 1 & \Rightarrow \ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Es decir hay cuatro puntos críticos:
$A = (0,1)$, $B = (0,-1)$, con $\lambda = -1$; $C = (1,0)$, $D = (-1,0)$, con $\lambda = 1$.

La forma más fácil de discutir si son máximos o mínimos es aplicar el teorema de Wierstrass pues la función $f(x,y)=x^2-y^2$ es continua y el conjunto definido por la condición $x^2+y^2=1$ es cerrado y acotado (es una circunferencia).

Como $f(A)=f(B)=-1<f(C)=f(D)=1$, en los puntos *A* y *B* tenemos mínimos locales y en *C* y *D* máximos locales. ○

7 Si *z* es una función de variables *x* e *y*, obtener la expresión de $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ al cambiar las variables *x* e *y* por r y α si $x=e^r\cos\alpha$, $y=e^r\operatorname{sen}\alpha$.

Como $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, necesitamos hallar $\frac{\partial r}{\partial x}$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$. Para ello, se puede derivar implícitamente el sistema respecto de x para hallar $\frac{\partial r}{\partial x}$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$:

$$\left\{\begin{array}{l} 1=e^r\frac{\partial r}{\partial x}\cos\alpha-e^r\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ 0=e^r\frac{\partial r}{\partial x}\operatorname{sen}\alpha+e^r\cos\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x}\end{array}\right\}$$

. Ahora por Crammer, se tiene

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -e^r\operatorname{sen}\alpha\\ 0 & e^r\cos\alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^r\cos\alpha & -e^r\operatorname{sen}\alpha\\ e^r\operatorname{sen}\alpha & e^r\cos\alpha\end{vmatrix}}=\frac{e^r\cos\alpha}{e^{2r}}=\frac{\cos\alpha}{e^r};\quad \frac{\partial \alpha}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}e^r\cos\alpha & 1\\ e^r\operatorname{sen}\alpha & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^r\cos\alpha & -e^r\operatorname{sen}\alpha\\ e^r\operatorname{sen}\alpha & e^r\cos\alpha\end{vmatrix}}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{e^r}$$

Sustituyendo estos valores en $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ y simplificando se obtiene el resultado:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\cos\alpha}{e^r}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\left(\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{e^r}\right)=0\text{, es decir }\boxed{\cos\alpha\frac{\partial z}{\partial r}-\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial z}{\partial \alpha}=0}$$ ○