UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Matemáticas

E.T.S.I.T.
PRIMER CURSO
CÁLCULO – 29.01.07– 09.00 horas
CONVOCATORIA ORDINARIA

SOLUCIONES

(1.5 p) **1** Sea el número complejo $z = i^i$. Calcular su módulo y su argumento.

Tomando logaritmos neperianos resulta (y teniendo presente que $\ln 1 = 0$):
$\ln z = i \ln i = i\left[\ln 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i\right] = -\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, de donde $z = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$. Por tanto
$|z| = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, y $\operatorname{Arg}(z) = 0$. ○

(1.0 p) **2 a)** Sea $A = \left(-1, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Q}$. Hallar, razonadamente $\overset{\circ}{A}$, $\operatorname{Ext}A$, y $\operatorname{Fr}A$.

$\overset{\circ}{A} = \varnothing$, $\operatorname{Ext}A = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, y $\operatorname{Fr}A = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ ○

b) Dar un ejemplo de dos conjuntos disjuntos de números reales A y B que tengan interior vacío y tales que $A \cup B$ sea un intervalo cerrado.

Por ejemplo: $A = [0,1] \cap Q$, $B = [0,1] \cap (R - Q)$ ○

(1.5 p) **3** Hallar el límite siguiente: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$

Por Stolz: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}}$.

Nótese que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$; $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)(n-1)} = e$.

Por tanto la solución es $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} = \frac{e}{2}$ ○

(1.5 p) **4** Hallar el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+1)\left(2+\sqrt{2}\right)\ldots\left(2+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{(n-1)!}}(x-2)^n$

Para calcular el radio de convergencia calculamos el

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2+1)\left(2+\sqrt{2}\right)\ldots\left(2+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{(n-1)!}}}{\dfrac{(2+1)\left(2+\sqrt{2}\right)\ldots\left(2+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{(n-2)!}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)}} = 1$$, por tanto el radio de convergencia es $R=1$. De donde, el conjunto de convergencia contiene al intervalo $(1,3)$, por ser la serie centrada en $x=2$.

Para $x=3$ resulta la serie numérica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+1)\left(2+\sqrt{2}\right)\ldots\left(2+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{(n-1)!}}$

Como el numerador del término general es mayor que el denominador, el término general no tiende a cero, y por tanto es divergente.

Para $x=1$ resulta la serie numérica alternada: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+1)\left(2+\sqrt{2}\right)\ldots\left(2+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{(n-1)!}}(-1)^n$

Nótese que el valor absoluto del término general no tiende a cero, y por tanto no converge.

Por tanto el intervalo de convergencia pedido es $(1,3)$. ○

(2.0 p) **5** Estudiar en el origen la continuidad, existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

La función no es continua en el origen como puede comprobarse porque los límites reiterados no son iguales:

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=1;\quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{y\to0}\frac{-y}{\sqrt{y^2}}=-1$$

y por tanto no es diferenciable en el origen. Para hallar las derivadas direccionales en el origen utilizamos la definición de derivada direccional:

$$D_v f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{t\cos\alpha-t\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{t^2}}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\alpha-\mathrm{sen}\,\alpha}{t}$$

Que no existe. ○

(1.0 p) **6** Obtener las derivadas parciales de r y α, si vienen dadas en forma implícita por las ecuaciones $x=r\cos\alpha$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

Se puede derivar implícitamente el sistema respecto de x para hallar $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$:

$$\left.\begin{cases} 1=\dfrac{\partial r}{\partial x}\cos\alpha - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} \\ 0=\dfrac{\partial r}{\partial x}\mathrm{sen}\,\alpha + r\cos\alpha\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\end{cases}\right\}$$. Ahora por Crammer, se tiene

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -r\,\mathrm{sen}\,\alpha\\ 0 & r\cos\alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\alpha & -r\,\mathrm{sen}\,\alpha\\ \mathrm{sen}\,\alpha & r\cos\alpha\end{vmatrix}}=\frac{r\cos\alpha}{r}=\cos\alpha;\quad \frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ \mathrm{sen}\,\alpha & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\alpha & -r\,\mathrm{sen}\,\alpha\\ \mathrm{sen}\,\alpha & r\cos\alpha\end{vmatrix}}=\frac{-\mathrm{sen}\,\alpha}{r}$$

También se puede usar el teorema de la función implícita. Para eso, llamamos $F=r\cos\alpha - x;\quad G=r\,\mathrm{sen}\,\alpha - y$. Entonces:

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{-\left|\dfrac{D(F,G)}{D(y,\alpha)}\right|}{\left|\dfrac{D(F,G)}{D(r,\alpha)}\right|}=\frac{-\begin{vmatrix}0 & -r\,\mathrm{sen}\,\alpha\\ -1 & r\cos\alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\alpha & -r\,\mathrm{sen}\,\alpha\\ \mathrm{sen}\,\alpha & r\cos\alpha\end{vmatrix}}=\frac{r\,\mathrm{sen}\,\alpha}{r}=\mathrm{sen}\,\alpha;$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{-\left|\dfrac{D(F,G)}{D(r,y)}\right|}{\left|\dfrac{D(F,G)}{D(r,\alpha)}\right|}=\frac{-\begin{vmatrix}\cos\alpha & 0\\ \mathrm{sen}\,\alpha & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\alpha & -r\,\mathrm{sen}\,\alpha\\ \mathrm{sen}\,\alpha & r\cos\alpha\end{vmatrix}}=\frac{-\cos\alpha}{r}$$

○

(1.5 p) **7** Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ siendo $x^2+y^2=4$.

Por el método de los multiplicadores de Lagrange, consideramos la función auxiliar: $W=x^2-xy+y^2+\lambda\left(x^2+y^2-4\right)$. Resolvemos el sistema formado por las derivadas parciales igual a cero junto con la condición:

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial x}=2x-y+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial W}{\partial y}=-x+2y+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=4\end{cases}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}\lambda=\dfrac{y-2x}{2x}\\ \lambda=\dfrac{x-2y}{2y}\end{matrix}\Rightarrow \frac{y-2x}{2x}=\frac{x-2y}{2y}\Rightarrow x^2=y^2$$

Es decir $x=y$ ó $x=-y$, lo que sustituido en la condición nos lleva a cuatro puntos críticos: $A=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right), B=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right), C=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right), D=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

La forma más fácil de discutir si son máximos o mínimos es aplicar el teorema de Wierstrass pues la función $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ es continua y el conjunto definido por la condición $x^2+y^2=4$ es cerrado y acotado (es una circunferencia).

Como $f(A)=f(B)=2<f(C)=f(D)=6$, en los puntos A y B tenemos mínimos locales y en C y D máximos locales. ○