UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Matemáticas

E.T.S.I.T.
PRIMER CURSO
CÁLCULO – 29.11.07– 16.00 horas
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
Profesor A. Plaza

SOLUCIÓN del EXAMEN

(1.5 pt.) **1** Resolver la ecuación $\mathrm{Sh}(z)=2i$.

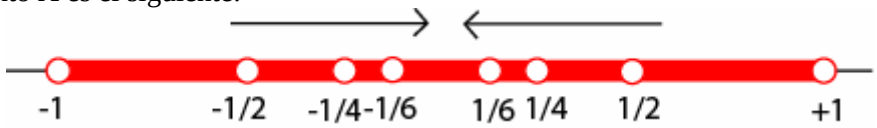
$\mathrm{Sh}(z)=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}\Rightarrow\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}=2i\Rightarrow e^z-e^{-z}=4i$. Hacemos $e^z=T$, y la ecuación resulta: $T-T^{-1}=4i\Rightarrow T^2-1=4iT\Rightarrow T^2-4iT-1=0$, cuyas soluciones son:

$T=\dfrac{4i\pm\sqrt{-16+4}}{2}=\dfrac{4i\pm2\sqrt{3}i}{2}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)i$, de donde

$\boxed{z=\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)i=\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}$, con k un número entero.

(1.0 pt.) **2** Sea A el intervalo abierto $(-1,1)$ en el que se han eliminado los puntos de la forma $\dfrac{1}{2n}$, siendo n un número entero cualquiera (positivo o negativo). Hallar $\overset{\circ}{A}$, $\mathrm{Ext}A$, y $\mathrm{Fr}A$.

El conjunto A es el siguiente:



Entonces:

$\overset{\circ}{A}=A-\{0\}$, $\mathrm{Ext}A=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, y $\mathrm{Fr}A=\left\{\dfrac{1}{2n},\ \text{con } 0\neq n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{0\}$

(1.5 pt.) **3** Hallar el límite siguiente: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$.

Por Stolz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2n-1}\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}}=\frac{e}{2}$$

(1.5 pt.) **4** Estudiar el intervalo de convergencia de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n+1}}(x+1)^n$.

Primero nótese que $\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{n^2+n+1}\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}$. Ahora, como

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3}{\sqrt{n^2+n+1}\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}}=1$, el radio de convergencia de la serie es 1, luego el intervalo de convergencia es, al menos, $(-2,0)$.

Para $x=0$, resulta la serie:

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n^2+n+1}\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}$, que es convergente por comparación con la armónica de exponente 3/2.

Para $x=-2$, resulta la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n^2+n+1}\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}(-1)^n$, que es absolutamente convergente. Por tanto el intervalo de convergencia es $\boxed{[-2,0]}$.

(1.5 pt.) **5** Estudiar la existencia de derivadas parciales y la diferenciabilidad en el origen de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Por definición de derivadas parciales en un punto, resulta:

$\dfrac{\delta f}{\delta x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h+0}{\sqrt{h^2+0}}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{|h|}$ que no existe. Del mismo modo, tampoco existe la otra derivada parcial en el origen. Por tanto la función no puede ser diferenciable en el origen.

(1.5 pt.) **6** En la ecuación $z_{xx}+z_{yy}=0$, cambiar las variables independientes x e y por r y θ, si $x=r\cos\theta$ y $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

$z_x=z_r r_x+z_\theta\theta_x$, $z_y=z_r r_y+z_\theta\theta_y$. Derivando respecto de x en las ecuaciones del cambio de variables resulta:

$\left.\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}1=r_x\cos\theta-r\,\mathrm{sen}\,\theta\theta_x\\ 0=r_x\,\mathrm{sen}\,\theta+r\cos\theta\theta_x\end{array}\right\}$, de donde, por Crammer:

$$r_x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -r\,\mathrm{sen}\,\theta\\ 0 & r\cos\theta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta;\quad \theta_x=\frac{\begin{vmatrix}\cos\theta & 1\\ \mathrm{sen}\,\theta & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{-\mathrm{sen}\,\theta}{r}$$

Análogamente, derivando respecto de *y*, se obtiene:

$r_y=\mathrm{sen}\,\theta;\ \theta_y=\dfrac{\cos\theta}{r}$. Estas expresiones nos permiten obtener:

$z_x=z_r\cos\theta-z_\theta\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}$, $z_y=z_r\,\mathrm{sen}\,\theta+z_\theta\dfrac{\cos\theta}{r}$. De aquí, derivando, y por la regla de la cadena se obtiene:

$$z_{xx} = z_{rr}\cos^2\theta - 2z_{r\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + z_{\theta\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)^2 + z_r\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} + z_\theta\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}$$

$$z_{yy} = z_{rr}\operatorname{sen}^2\theta + 2z_{r\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + z_{\theta\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)^2 + z_r\frac{\cos^2\theta}{r} - z_\theta\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}$$

De donde sumando ambas ecuaciones e igualando a cero se obtiene el resultado:

$$\boxed{z_{rr} + z_{\theta\theta}\frac{1}{r^2} + z_r\frac{1}{r} = 0} \quad .$$

(1.5 pt.) **7** Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Por los multiplicadores de Lagrange, hay que buscar los extremos relativos de la función: $W(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2 + 2\lambda y = 0 \\ 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-1}{2x} = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = -2x \\ \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{z} \Rightarrow z = -y \\ x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) \\ Q\left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-2}{3}\right) \end{array}$$

Como $f(P) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3$, y $f(Q) = \frac{-1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3$, en P tenemos un máximo relativo y en Q un mínimo relativo, porque f es una función continua definida en un conjunto cerrado y acotado (la esfera), por el teorema de Weierstrass.

Los exámenes se pueden ver el lunes 3 ó el martes 4 de 9 a 10 horas – Despacho 39 Edif. Matemáticas e Informatica