1 Considérese el problema de valor inicial $xz_x + (x+z)z_y = y - x$, sobre la curva $x = t;\ y = 2t;\ t \geq 0$. Hallar la solución $z = z(x,y)$ que sobre la curva anterior toma los valores $z = 1 - t$.

Para que la solución sea única ha de cumplirse la condición: $\dfrac{\frac{dx(t)}{dt}}{P} \neq \dfrac{\frac{dy(t)}{dt}}{Q}$, que según los datos del problema resulta: $\dfrac{1}{t} \neq \dfrac{2}{1}$, lo que es cierto si $t \neq \dfrac{1}{2}$. En ese caso, procedemos a encontrar dos primeras integrales del campo funcionalmente independientes:

De $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{x+z} = \dfrac{dz}{y-x}$, sumando el segundo y tercer miembro resulta: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{d(y+z)}{y+z}$ que se integra fácilmente: $u_1 = \dfrac{y+z}{x}$. Por otro lado, restando en el primer y segundo miembro tenemos: $\dfrac{d(y-x)}{z} = \dfrac{dz}{y-x}$ que nos da otra primera integral: $u_2 = (y-x)^2 - z^2$.

Como:

$$\vec{\nabla} u_1 \times \vec{\nabla} u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-y-z}{x^2} & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ -2(y-x) & 2(y-x) & -2z \end{vmatrix} = \left(\tfrac{2}{x}(x-y-z), \ldots, \ldots\right) = \left(\frac{-2}{t}, \ldots, \ldots\right) \neq (0,0,0)$$

las primeras integrales son funcionalmente independientes.
Para hallar la solución del problema del valor inicial eliminamos *t* del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{y+z}{x} \\ u_2 = (y-x)^2 - z^2 \end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{t+1}{t} \\ u_2 = t^2 - (1-t)^2 \end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{u_1 - 1} \\ u_2 = 2t - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow u_2 = \frac{2}{u_1 - 1} - 1$$, es decir:

$$(y-x)^2 - z^2 = \frac{2}{\frac{y+z}{x} - 1} - 1;\quad (y-x)^2 - z^2 = \frac{2x}{y+z-x} - 1 \qquad \square$$

2 Resolver $u_{tt} = u_{xx} + xt;\ 0 < x < \pi,\ 0 < t$, si las autofunciones del problema son: $X_n(x) = \operatorname{sen} nx$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y las condiciones iniciales son: $u(x,0) = \operatorname{sen} x$, $u_t(x,0) = \operatorname{sen}(3x)$.

Según los datos del problema la solución tendrá la forma: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}(nx)$, donde las funciones de t se obtienen sustituyendo $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}(nx)$ en la EDP inicial y teniendo en cuenta las condiciones iniciales. Esto nos lleva a una colección de problemas de valor inicial definidos por EDO's:

$$T_n''(t)+n^2T_n(t)=tA_n$$

$$T_n(t)=\begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ 0 & \text{si } n\neq 1\end{cases};\quad T_n'(t)=\begin{cases}1 & \text{si } n=3\\ 0 & \text{si } n\neq 3\end{cases}$$

Donde los coeficientes $A_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{sen}\,nx dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{sen}\,nx dx=\dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}$

La solución resulta:

$$u(x,t)=\left(-2\,\text{sen}(t)-2\cos(t)+2t\right)\text{sen}(x)+\left(\frac{25}{81}\text{sen}\,3t+\frac{2}{27}t\right)\text{sen}(3x)+$$

$$+\sum_{\substack{n=2\\ n\neq 3}}^{+\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n^4}\text{sen}\,nt+\frac{2(-1)^n}{n^3}t\right)\text{sen}\,nx$$

□

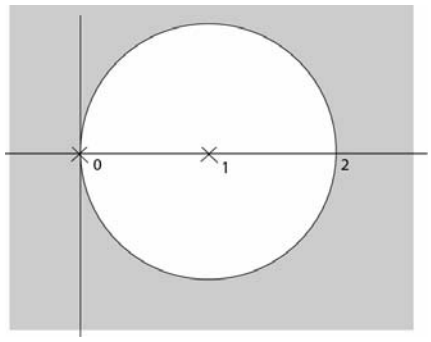
3 Determinar la serie de Laurent de las funciones siguientes en la región de convergencia que se indica:

(a) $f(z)=\dfrac{e^z-\left(1+z+\frac{z^2}{2}\right)}{z^5}$ en $|z|>0$, (b) $g(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ en $1<|z-1|$.

(a) Por el desarrollo deTaylor de e^z en el origen: $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\cdots$,

resulta que $f(z)=\dfrac{\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\cdots}{z^5}=\frac{1}{6z^2}+\frac{1}{24z}+\frac{1}{5!}+\frac{z}{6!}+\cdots=\sum_{n=-2}^{+\infty}\dfrac{z^n}{(n+5)!}$ □

(b) La región de convergencia de $g(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ está representada en la figura:



Como se ve está centrada en $z=1$, y por eso la solución tendrá la forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-1)^n$.

$$g(z)=\frac{z+1}{z(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{z+1}{z}\right)=\frac{1}{(z-1)^2}\left(1+\frac{1}{z}\right)\text{ y}$$

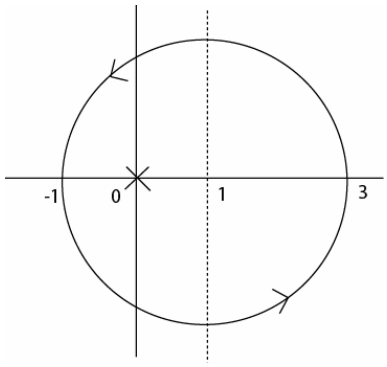
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1+1}=\frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tfrac{-1}{z-1}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{1-n}(z-1)^n\text{ y el resultado es:}$$

$$g(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\left(1+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{1-n}(z-1)^n\right)=(z-1)^{-2}+\sum_{n=-\infty}^{-3}(-1)^{1-n}(z-1)^n$$ □

4 Calcular las siguientes integrales mediante integración en el plano complejo:

(a) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{(z+1)e^z}{z^3}\,dz$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ (lema 3)

(a) La integral es de una función de variable compleja sobre el círculo de centro 1 y radio 2. La función subintegral sólo tiene un polo (triple) interior al recinto, en $z=0$. Por el de los residuos se tiene:



$\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{(z+1)e^z}{z^3}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(0)$, pues el índice de $z=0$ respecto de la curva es 1. Así

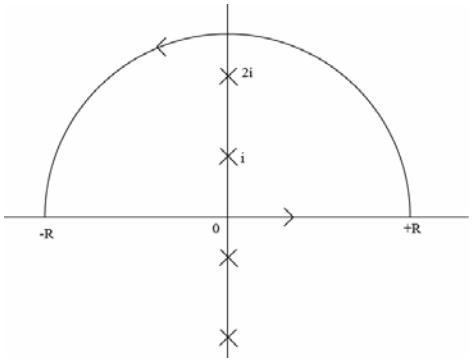
pues, como $\operatorname{Res}(0) = \dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to 0}\left(z^3\dfrac{(z+1)e^z}{z^3}\right)'' = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\left((z+1)e^z\right)'' = \dfrac{3}{2}$, resulta que

$$\int_{|z-1|=2} \frac{(z+1)e^z}{z^3}\,dz = 2\pi i\,\frac{3e}{2} = 3\pi i \qquad \square$$

(b) Consideramos que $\dfrac{x\operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \operatorname{Im}\left(\dfrac{xe^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\right)$, y por

tanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}\right) = \operatorname{Im} I$. Consideramos el recinto de la

figura:



y la curva $\gamma = [-R,R]\cup\delta_R$. Como $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2+4)} = 0$ por el lema 3 la integral sobre

el arco de circunferencia tiende a cero cuando $R\to+\infty$. Para $z\in[-R,R]$, $z=x$, y por tanto

$\displaystyle\int_{-R}^{+R} \frac{xe^{ix}\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \xrightarrow{R\to\infty} I$. Así pues, por el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma \frac{ze^{iz}dz}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(i)+\operatorname{Res}(2i)\right) = I$$

$$\operatorname{Res}(f,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{ze^{iz}}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)} = \frac{2ie^{-2}}{-4+1}\lim_{z\to 2i}\frac{1}{2z} = \frac{2ie^{-2}}{-12i} = \frac{-e^{-2}}{6}$$

Análogamente: $\operatorname{Res}(f,i) = \dfrac{ie^{-1}}{6i} = \dfrac{e^{-1}}{6}$.

$$I = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(i)+\operatorname{Res}(2i)\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{-1}-e^{-2}}{6}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{e-1}{e^2}\right)i$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} I = \frac{\pi}{3}\left(\frac{e-1}{e^2}\right)$$ □

5 Demostrar el teorema de convolución de la transformada de Fourier.

Teoría. Ver, por ejemplo, el Señales y Sistemas, página 315. □