SOLUCIÓN (TIEMPO ESTIMADO: 2 horas, 30 minutos)

(1.5 p.) **1** Considérese el problema de valor inicial $u_t = \cos u_x;\ u(0,x) = \frac{\pi}{4}x - \frac{\pi^2}{6}x^2$. Verificar que se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy-Kovalevsky y encontrar el desarrollo de la función hasta los términos de orden menor o igual a tres.

Solución:

Como las funciones que aparecen en el problema son analíticas, se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy-Kovalevsky y se puede encontrar la solución en serie de Taylor (centrada en el origen). La solución resulta:

$$u(t,x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\pi^2}{6}\left(x^2 - 2\sqrt{2}xt + t^2\right) + \frac{\pi^4}{18}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2t + xt^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}t^3\right) + \cdots. \ \square$$

(2.5 p.) **2** La vibración de una cuerda de longitud π viene regida por la ecuación en derivadas parciales $u_{tt} = u_{xx};\ 0 < x < \pi,\ 0 < t$. Hallar $u(x,t)$ si las condiciones iniciales son $u(x,0) = \operatorname{sen}(x)$ y $u_t(x,0) = \operatorname{sen}(2x)$ y se suponen condiciones de contorno nulas.

Solución:

Aplicando el método de separación de variables se obtiene la solución en la forma

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\operatorname{sen}(nx)$ con $T_n(0) = 1$ si $n = 1$, y $T_n(0) = 0$ si $n \neq 1$, y

$T_n'(0) = 1$ si $n = 2$, y $T_n'(0) = 0$ si $n \neq 2$ por las condiciones iniciales.

Sustituyendo $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\operatorname{sen}(nx)$ en la EDP resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + n^2 T_n(t)\right]\operatorname{sen}(nx) = 0.$$

Es decir, hay que resolver los problemas de valor inicial:

$$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0; \quad \text{con } T_n(0) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \neq 1 \end{cases};\ T_n'(0) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 2 \\ 0 \text{ si } n \neq 2 \end{cases}.$$

La solución resulta entonces:

$$u(x,t) = \cos(t)\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen}(2x) \qquad \square$$

(1.5 p.) **3** Sea la función de variable compleja $f(z)$ tal que la función $g(z)=(z^3+1)f(z)$ es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

¿Cuánto vale $f(i)$ si $g(z)$ está acotada en $\mathbb{C}$ y $\lim_{z\to -1}(z^3+1)f(z)=1$?

Solución:

Como $g(z)$ está acotada en $\mathbb{C}$ y es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$, por el teorema de Liouville, $g(z)$ es constante en $\mathbb{C}$. Como además $\lim_{z\to -1} g(z)=\lim_{z\to -1}(z^3+1)f(z)=1$ resulta que $g(z)=1$. Por tanto $f(i)=\dfrac{g(z)}{i^3+1}=\dfrac{1}{-i+1}=\dfrac{1+i}{2}$ □

(3.0 p.) **4** Calcular las siguientes integrales mediante integración en el plano complejo:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2a\cos t+a^2}$ si $a<1$; (b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{1/2}}{1+x^2}$

Solución:

(a) La integral es de tipo I, por lo que hay que emplear la expresión exponencial del coseno e integrar en la circunferencia unidad. Entonces:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2a\cos t+a^2}=\frac{-1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{az^2-(a^2+1)z+a}$$

. Por el Teorema de los residuos, la integral de variable complea, es igual a: $2\pi i\sum \mathrm{Res}(f,a_i)$ siendo *f* la función subintegral, y a_i los polos de la función *f* interiores a la circunferencia unidad. El único polo interior a $|z|=1$ es $z=a$, que es un polo simple.

Como:

$$\mathrm{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{1}{az^2-(a^2+1)z+a}=$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{1}{2az-(a^2+1)}=\frac{1}{2a^2-(a^2+1)}=\frac{1}{a^2-1}$$

La integral pedida es en Γ es la suma en cada trozo de curva resultado:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2a\cos t+a^2}=\frac{-1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{az^2-(a^2+1)z+a}=\frac{-1}{i}2\pi i\frac{1}{a^2-1}=\frac{2\pi}{1-a^2}$$

(b) Como la función subintegral es tiene un término con exponente racional, se utiliza como recinto de integración el formado por los segmentos $[\varepsilon,R]$, $[R,\varepsilon]$ y los arcos de circunferencia de radio ε y *R*.. La integral pedida se puede escribir como:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{1/2}}{1+x^2}$$

En el segmento $[\varepsilon, R]$, $\int_{[\varepsilon,R]} \frac{z^{1/2}}{1+z^2}\,dz \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}]{} I$.

En circunferencia de radio R centrada en el origen, como $\lim_{z\to\infty} z\frac{z^{1/2}}{1+z^2} = 0$, se tiene

$\int_{\delta_R} \frac{z^{1/2}}{1+z^2}\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, por el lema 1.

En circunferencia de radio ε centrada en el origen, como $\lim_{z\to 0} z\frac{z^{1/2}}{1+z^2} = 0$, se tiene

$\int_{\delta_\varepsilon} \frac{z^{1/2}}{1+z^2}\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, por el lema 2.

Finalmente, en el segmento $[R, \varepsilon]$ hay que notar que $z = xe^{2\pi i}$, y por tanto:

$$\int_{[R,\varepsilon]} \frac{z^{1/2}}{1+z^2}\,dz = \int_R^{\varepsilon} \frac{xe^{\pi i}}{1+x^2}\,dx = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{x}{1+x^2}\,dx \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}]{} I$$

Por el Teorema de los Residuos se tiene que:

$$2I = \int_\Gamma \frac{z^{1/2}}{1+z^2}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^{1/2}}{1+z^2}dz, +i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{1/2}}{1+z^2}dz, -i\right)\right]$$

Por otro lado, como $\operatorname{Res}\left(\frac{z^{1/2}}{1+z^2}, +i\right) = \lim_{|z|\to i}(z-i)\frac{z^{1/2}}{1+z^2} = \lim_{|z|\to i}\frac{z^{1/2}}{z+i} = \frac{i^{1/2}}{2i}$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{1/2}}{1+z^2}, -i\right) = \lim_{|z|\to -i}(z+i)\frac{z^{1/2}}{1+z^2} = \lim_{|z|\to -i}\frac{z^{1/2}}{z-i} = \frac{(-i)^{1/2}}{-2i}$$

De donde:

$$2I = \int_\Gamma \frac{z^{1/2}}{1+z^2}dz = 2\pi i\left[\frac{e^{(\pi/4)i}}{2i} - \frac{e^{(3\pi/4)i}}{2i}\right] = \pi\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \qquad \square$$

(1.5 p.) **5** Hallar, razonadamente, $x[n]$, si su transformada z es

$$X(z) = \frac{e^{az}-1}{z} \text{ con ROC: } |z| > 0.$$

Solución:

Aquí se puede hallar la serie de Laurent en el origen de $X(z)$, y para eso se puede utilizar la serie de Taylor de la función $g(z) = e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!}$. De donde:

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{a^{-n+1}}{(1-n)!} z^{-n} .$$

Por tanto $x[n] = \begin{cases} \frac{a^{-n+1}}{(1-n)!} & \text{si } n \le 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$. $\square$