1 (a) Dar una condición que asegure la existencia de infinitas soluciones del problema de valor inicial de las ecuaciones casi-lineales de primer orden.

Teoría: $\dfrac{\frac{dx(t)}{dt}}{P}=\dfrac{\frac{dy(t)}{dt}}{Q}=\dfrac{\frac{dz(t)}{dt}}{R}$

(b) Considérese el problema de valor inicial $xz_x+yz_y=z$, con $z=f(t)$ sobre la curva $x=t;\ y=t;\ t\geq 0$. Hallar las funciones $f(t)$ para las que el problema de valor inicial tiene infinitas soluciones.

Hay que imponer la condición: $\dfrac{\frac{dx(t)}{dt}}{P}=\dfrac{\frac{dy(t)}{dt}}{Q}=\dfrac{\frac{dz(t)}{dt}}{R}$, que según los datos del problema resulta: $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{t}=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$. Por tanto las funciones buscadas han de cumplir: $\dfrac{1}{t}=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$, donde integrando respecto de t se obtiene: $\displaystyle\int\frac{1}{t}dt=\int\frac{f'(t)}{f(t)}dt$

$\Rightarrow\quad \ln f(t)=\ln t+C \quad\Rightarrow\quad f(t)=kt$, con $C=\ln k$, y $k>0$. □

2 Resolver $u_{tt}=u_{xx};\ 0<x<\pi,\ 0<t$, con condiciones de contorno tipo Neumann y condiciones iniciales $u(x,0)=1+\cos x$ y $u_t(x,0)=\cos(3x)$.

Aplicando el método de separación de variables y las condiciones de contorno homogéneas que son: $u_x(0,t)=0;\ u_x(\pi,t)=0$ se obtiene la solución en la forma:

$u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nt)+b_n\operatorname{sen}(nt)\big)\cos(nx)$, donde los coeficientes se obtienen mediante las condiciones iniciales, resultando la solución

$u(x,t)=1+\cos(t)\cos(x)+\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)\cos(3x)$ □

3 Determinar las singularidades, y el orden del polo en su caso, de las siguientes funciones:

(a) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$, (b) $g(z)=\dfrac{\operatorname{sen} z}{z(z+2)^2}$.

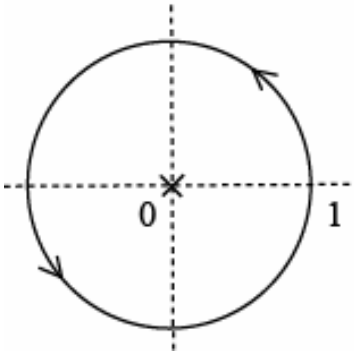
(a) El numerador de $f(z)$ se anula sólo para $z=0$, y también el denominador. Como el orden del cero del numerador es 1, pues $\left(e^z-1\right)'\Big|_{z=0}=e^0=1\neq 0$, y el orden del cero del denominador es 2, resulta que $f(z)$ tiene un polo de orden 1 en $z=0$. □

(b) Los ceros del denominador de $g(z)$ son: $z=0$ de orden 1, y $z=-2$ de orden 2. Como $z=0$ anula también el numerador (raíz simple) resulta que $z=0$ es una singularidad evitable. Como $z=-2$ no anula el numerador, se tiene un polo de orden 2. $\square$

4 Calcular las siguientes integrales mediante integración en el plano complejo:

$$\text{(a)} \quad \int_{|z|=1} \frac{z^2}{\cos z \operatorname{sen}^3 z}\, dz, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}.$$

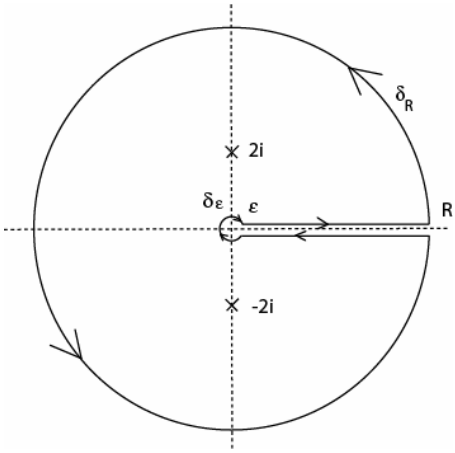
(a) La integral es de una función de variable compleja sobre el círculo unidad centrado en el origen. La función subintegral sólo tiene un polo (simple) interior al recinto, en $z=0$. Por el teorema de los residuos se tiene:



$\int_{|z|=1} \frac{z^2}{\cos z \operatorname{sen}^3 z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(0)$, pues el índice de $z=0$ respecto de la curva es 1. Así pues, como $\operatorname{Res}(0) = \lim_{z\to 0} z \frac{z^2}{\cos z \operatorname{sen}^3 z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^3}{\cos z \operatorname{sen}^3 z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\cos z} = 1$, resulta que

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2}{\cos z \operatorname{sen}^3 z}\, dz = 2\pi i \qquad \square$$

(b) Como la función subintegral contiene una potencia no entera de la variable y el intervalo de integración es $(0,+\infty)$ se puede considerar el recinto de integración siguiente:



y la curva $\gamma = [\varepsilon, R] \cup \delta_R \cup [R, \varepsilon] \cup \delta_\varepsilon$. Por los lemas 1 y 2 respectivamente las integrales sobre los arcos de circunferencia tienden a cero al tomar límites $\varepsilon \to 0,\ R \to +\infty$. Para $z \in [\varepsilon, R]$, $z = x$, y por tanto

$$\int_{[\varepsilon,R]}\frac{dz}{\left(z^2+4\right)\sqrt{z}}=\int_{\varepsilon}^{+R}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}=\int_{\varepsilon}^{+R}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}\xrightarrow{\varepsilon\to 0,\ R\to\infty}=I$$

Para $z\in\left[R,\varepsilon\right]$, $z=x\cdot e^{2\pi i}$, y por tanto

$$\int_{[R,\varepsilon]}\frac{dz}{\left(z^2+4\right)\sqrt{z}}=\int_{+R}^{\varepsilon}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)\sqrt{xe^{2\pi i}}}=\int_{+R}^{\varepsilon}\frac{dx}{e^{\pi i}\left(x^2+4\right)\sqrt{x}}=\xrightarrow{\varepsilon\to 0,\ R\to\infty}=I$$

La integral sobre el recinto será, por el teorema de los residuos:

$$\int_{\gamma}\frac{dz}{\left(z^2+4\right)\sqrt{z}}=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(2i\right)+\operatorname{Res}\left(-2i\right)\right)=2I$$

$$\operatorname{Res}\left(f,2i\right)=\lim_{z\to 2i}\left(z-2i\right)\frac{1}{\left(z^2+4\right)\sqrt{z}}=\left(\text{por L'Hopital}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2i}}\lim_{z\to 2i}\frac{1}{2z}=\frac{2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{4i},\ \text{y}\ \operatorname{Res}\left(f,-2i\right)=\frac{2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{-4i}$$

$$2I=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(2i\right)+\operatorname{Res}\left(-2i\right)\right)=2\pi i\left(\frac{2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{4i}-\frac{2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{4i}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{-\frac{\pi}{4}i}}{4e^{\frac{\pi}{2}i}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ I=\frac{\pi}{8}$$ □

5 Mediante la transformada de Laplace unilateral, hállese la solución del problema de valor inicial:

$$x''\left(t\right)+3x'(t)+2x\left(t\right)=2,$$

con condiciones iniciales $x\left(0\right)=3,\ x'(0)=-5.$

Mediante la transformada de Laplace unilateral, resulta:

$$s^2X\left(s\right)-3s+5+3\left(sX\left(s\right)-3\right)+2X\left(s\right)=\frac{2}{s};\ X\left(s\right)\left(s^2+3s+2\right)=\frac{2}{s}+3s+4$$

$$X\left(s\right)=\frac{2}{s\left(s^2+3s+2\right)}+\frac{3s+4}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2}.$$ De donde:

$$x\left(t\right)=\left[1-e^{-t}+3e^{-2t}\right]u\left(t\right)$$ □

* 6 Demostrar la relación de Parseval de la transformada de Fourier de señales continuas.

Ver, por ejemplo, página 312 del Señales y Sistemas.