SOLUCIÓN (TIEMPO ESTIMADO: 2 horas, 45 minutos)

(1.5 p.) **1** Definir superficie primera integral de un campo vectorial $V=(P,Q,R)$. Hallar dos superficies primeras integrales del campo vectorial $V=\left(x,y,\dfrac{x}{yz}\right)$.

Solución:

Una superficie primera integral de un campo vectorial $V=(P,Q,R)$ es una superficie $u=u(x,y,z)$ que es tangente al campo vectorial $V=(P,Q,R)$, es decir que $\overrightarrow{grad}\, u\cdot\vec{V}=0$, o lo que es lo mismo: $u_xP+u_yQ+u_zR=0$.

Para hallar dos superficies primeras integrales del campo vectorial $V=\left(x,y,\dfrac{x}{yz}\right)$, resolvemos el sistema equivalente: $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{\frac{x}{yz}}$:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\quad\Rightarrow\quad \ln x=\ln y+C\quad\Rightarrow\quad u_1=\frac{x}{y}$$ es una primera integral de $V=(P,Q,R)$

Para encontrar otra primera integral de $V=(P,Q,R)$ hacemos $c_1=\dfrac{x}{y}$ en $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{\frac{x}{yz}}$ y resulta $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{zdz}{c_1}$ que es fácilmente integrable: $\ln z=\dfrac{z^2}{2c_1}+c_2$ de donde, deshaciendo el cambio de variable, tenemos: $u_2=-\dfrac{z^2y}{2x}+\ln z$. □

(2.5 p.) **2** Resuélvase por el método de separación de variables el siguiente problema: $u_t=u_{xx}+\cos\pi x,\ 0<x<1;\ t>0$, con extremos aislados y condición inicial: $u(x,0)=\cos 2\pi x;\ 0<x<1$.

Solución:

Aplicando el método de separación de variables se obtiene la solución en la forma $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos(n\pi x)$ con $T_n(0)=1$ si $n=2$, y $T_n(0)=0$ si $n\neq 2$ por la condición inicial.

Sustituyendo $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos(n\pi x)$ en la EDP resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t)+n^2\pi^2T_n(t)\right]\cos(n\pi x)=\cos(\pi x).$$

Es decir, hay que resolver los problemas de valor inicial:

$$T_n'(t)+n^2\pi^2T_n(t)=\begin{cases}1 \text{ si } n=1\\ 0 \text{ si } n\neq 1\end{cases};\quad \text{con } T_n(0)=\begin{cases}1 \text{ si } n=2\\ 0 \text{ si } n\neq 2\end{cases}.$$

La solución resulta entonces:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)\cos(\pi x)+e^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x) \qquad \square$$

(1.5 p.) **3** Sea la función de variable compleja $f(z)$ tal que la función $g(z)=\left(z^3+1\right)f(z)$ es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

¿Cuánto vale $f(i)$ si $g(z)$ está acotada en $\mathbb{C}$ y $\lim_{z\to -1}\left(z^3+1\right)f(z)=1$?

Solución:

Como $g(z)$ está acotada en $\mathbb{C}$ y es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$, por el teorema de Liouville, $g(z)$ es constante en $\mathbb{C}$. Como además $\lim_{z\to -1}g(z)=\lim_{z\to -1}\left(z^3+1\right)f(z)=1$ resulta que $g(z)=1$. Por tanto $f(i)=\dfrac{g(z)}{i^3+1}=\dfrac{1}{-i+1}=\dfrac{1+i}{2}$ $\square$

(3.0 p.) **4** Calcular las siguientes integrales mediante integración en el plano complejo:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2\pi}\frac{e^z}{(z-\pi i)^n}dz$, con $n\geq 1$, (b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+9}$.

Solución:

(a) La integral, por el Teorema de los residuos, es igual a: $2\pi i\sum \text{Res}(f,a_i)$ siendo f la función subintegral, y a_i los polos interiores a Γ de la función f. El único polo interior a $|z|=2\pi$ es $z=\pi i$, que es un polo de orden n.

Como:

$$\text{Res}(f,\pi i)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to\pi i}\left[(z-\pi i)^n\frac{e^z}{(z-\pi i)^n}\right]^{(n-1)}=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to\pi i}\left[e^z\right]^{(n-1)}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to\pi i}e^z=\frac{e^{\pi i}}{(n-1)!}=\frac{-1}{(n-1)!}$$

La integral pedida es en Γ es la suma en cada trozo de curva resultado:

$$\int_{|z|=2\pi} \frac{e^z}{(z-\pi i)^n}\,dz = \frac{-2\pi i}{(n-1)!}$$

(b) Como la función subintegral es par, la integral pedida se puede escribir como:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+9} = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+9}$$

Consideremos el recinto de integración formado por el segmento $[-R,R]$ y la semicircunferencia superior centrada en el origen y de radio *R*. Por el Teorema de los Residuos se tiene que:

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+9} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, 3i\right) = 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{z-3i}{z^2+9} = \frac{2\pi i}{6i} = \frac{\pi}{3}$$

Por otro lado, como $\lim_{|z|\to\infty} \frac{z}{z^2+9} = 0$, el lema 1 asegura que la integral en la semicircunferencia superior tiende a 0 cuando *R* tiende a infinito. De donde:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+9} = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+9} = \tfrac{1}{2}\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+9} = \frac{\pi}{6} \qquad \square$$

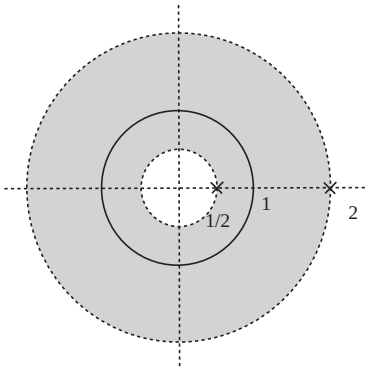
(1.5 p.) **5** Hallar, razonadamente, $x[0]$ si la transformada z de $x[n]$ es

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-2z^{-1}}$$

y si la región de convergencia contiene a la circunferencia unidad.

Solución:

Aquí es fundamental tener presente la región de convergencia:



Así que el primer sumando de la transformada, $\frac{\frac{1}{4}}{1-2z^{-1}}$ corresponde a una señal a izquierdas, y el segundo, $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, a una señal a derechas. Por tanto la señal pedida es:

$$x[n] = -\tfrac{1}{4}(2)^n u[-n-1] + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Es decir que $x[0] = -\tfrac{1}{4}(2)^0 u[-1] + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 u[0] = \frac{1}{3}$.

El mismo resultado se obtiene manipulando ambos sumandos con la fórmula de la suma de una serie geométrica y teniendo presente la región de convergencia: $\frac{1}{2} < |z| < 2$. $\square$