SOLUCIONES:

1 Definir qué se entiende por curva integral de un campo vectorial *V*. Hallar las curvas integrales del campo vectorial $V=\left(x^2,y^2,z(x+y)\right)$.

Solución:

Una curva *C* de ecuaciones en forma paramétrica: $(x,y,z)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ se llama *curva integral* del campo vectorial $V=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)$, si en cada punto de la curva *C* el vector tangente a la curva es paralelo al campo. Es decir, se cumple el sistema de ecuaciones: $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$.

Para hallar las curvas integrales de un campo vectorial hay que encontrar dos primeras superficies integrales del campo *V*. En el ejemplo del problema:

$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z(x+y)}$, y resolviendo la primera ecuación se tiene una primera integral:

$$\frac{-1}{x}=\frac{-1}{y}+u_1 \Rightarrow u_1=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$$

Para hallar otra primera superficie integral se puede utilizar la anterior, pero es más fácil hacer lo siguiente, restando numerador y denominador en la primera ecuación:

$\frac{d(x-y)}{x^2-y^2}=\frac{dz}{z(x+y)} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{dz}{z(x+y)} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)}=\frac{dz}{z}$, que se puede integrar para resultar: $\ln(x-y)=\ln(z)+C \Rightarrow u_2=\frac{x-y}{z}$.

Por tanto las curvas integrales de *V* se expresarán como la intersección de esas primera superficies integrales:

$$C:\begin{cases} u_1=\frac{1}{y}-\frac{1}{x} \\ u_2=\frac{x-y}{z} \end{cases}$$

Se puede comprobar que las superficies integrales halladas son funcionalmente independientes.

□

2 Deducir razonadamente la solución estacionaria del problema definido por la ecuación en derivadas parciales: $V_t(x,t)=4V_{xx}(x,t)$; para $0<x<2$, $0<t$, con las siguientes condiciones de contorno e iniciales:

$$V_x(0,t)=0;\quad V_x(2,t)=0;\quad \text{para } 0<t.$$
$$V(x,0)=1-|x-1|;\quad \text{para } 0<x<2.$$

Solución:

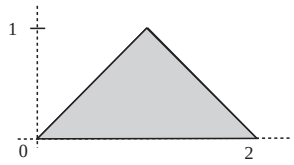
El problema pide "deducir razonadamente la SOLUCIÓN ESTACIONARIA" de un problema de la ecuación del calor con condiciones de contorno nulas sobre la derivada (es decir extremos aislados):

$$V_x(0,t)=0; \quad V_x(2,t)=0; \quad \text{para } 0<t.$$

Como se ha visto, la solución estacionaria de este problema es constante e igual al valor medio de la distribución inicial: $V(x,0)=1-|x-1|; \quad \text{para } 0<x<2.$

Por tanto la solución estacionaria resulta: $\lim_{t\to\infty} V(x,t)=\dfrac{\int_0^2 1-|x-1|\,dx}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Para calcular esa integral, lo más sencillo es representar la función subintegral:



También se puede resolver el problema por el método de Fourier y calcular finalmente $\lim_{t\to\infty} V(x,t)$. □

3 Definir función analítica en un conjunto Ω. Hallar en cada caso si es posible, o explicar por qué no existe, una función entera, no nula y tal que:

(a) $f(-i)=1$ y $f^{n)}(-i)=(3i)^n$, para $n\geq 1$.

(b) $f(i)=0$ y $f^{n)}(i)=0$, para $n\geq 1$.

Solución:

(a) $f(-i)=1$ y $f^{n)}(-i)=(3i)^n$, para $n\geq 1$.

En esas condiciones la función entera (analítica en todo $\mathbb{C}$) de existir será, por el teorema de Taylor:

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(-i)}{n!}(z+i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3i)^n}{n!}(z+i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(3i(z+i)\right)^n}{n!}=e^{3iz-3}$, que es entera pues el exponente y la función e^z son funciones enteras. □

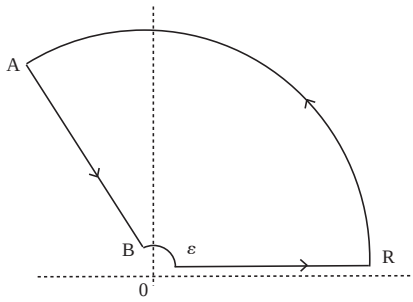
(b) $f(i)=0$ y $f^{n)}(i)=0$, para $n\geq 1$.

En estas condiciones, el Primer Teorema e Identidad nos asegura que la única función entera (analítica en el abierto conexo que es todo el plano complejo) y que es igual a cero en un punto (en punto *i* en el ejemplo) y todas sus derivadas en ese punto son nulas, es la función idénticamente nula. Por tanto, no existe una función entera no nula que cumpla el aparado (b). □

4 Calcular razonadamente la siguiente integral mediante métodos de variable compleja:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^a\,dx}{x^3+1}, \text{ donde } 1>a>-1,\ (a\neq 0)$$

(En el dibujo $A=Re^{\frac{2\pi}{3}i}$)



Solución:

Si llamamos Γ al recinto de la figura, la integral de variable compleja en Γ será igual, por el Teorema de los residuos, a: $2\pi i\sum \text{Res}(f,a_i)$ siendo *f* la función subintegral, y a_i los polos interiores a Γ de la función *f*. Los únicos polos interiores al recinto se calculan hallando los ceros del denominador:

$z^3+1=0, \Rightarrow \mathrm{z}=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{e^{\pi i}}=\left\{e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i},\ \text{para } 0\le k\le 2\right\}$. Luego el único polo interior a Γ es $z=e^{\frac{\pi}{3}i}$. El residuo resulta:

$$\mathrm{Res}(f,e^{\frac{\pi i}{3}})=\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}}\left(z-e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\frac{z^a}{z^3+1}=e^{a\frac{\pi i}{3}}\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}}\frac{z-e^{\frac{\pi i}{3}}}{z^3+1}=e^{a\frac{\pi i}{3}}\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}}\frac{1}{3z^2}=e^{a\frac{\pi i}{3}}\frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{-3}$$

Por otro lado la integral en Γ es la suma en cada trozo de curva resultado:

$$\oint_\Gamma\frac{z^a\,dz}{z^3+1}=\int_{[\varepsilon,R]}\frac{x^a\,dx}{x^3+1}+\int_{\delta_R}\frac{z^a\,dz}{z^3+1}+\int_{[A,B]}\frac{z^a\,dz}{z^3+1}+\int_{-\delta_\varepsilon}\frac{z^a\,dz}{z^3+1}$$

$\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{[\varepsilon,R]}\frac{x^a\,dx}{x^3+1}=I$; $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\delta_R}\frac{z^a\,dz}{z^3+1}=0$ pues $\lim\limits_{z\to\infty}z\frac{z^a}{z^3+1}=0$; $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-\delta_\varepsilon}\frac{z^a\,dz}{z^3+1}=0$ pues

$\lim\limits_{z\to 0}z\frac{z^a}{z^3+1}=0$; y para la integral en el segmento $[A,B]$ hay que observar que en ese caso

$\mathrm{z}=xe^{\frac{2\pi}{3}i}$, para $R\ge x\ge\varepsilon$ de donde

$\int_{[A,B]}\frac{z^a\,dz}{z^3+1}=\int_R^\varepsilon\frac{x^a e^{\frac{2a\pi}{3}i}e^{\frac{2\pi}{3}i}\,dx}{x^3+1}=-e^{\frac{2(a+1)\pi}{3}i}\int_\varepsilon^R\frac{x^a\,dx}{x^3+1}\xrightarrow[R,\varepsilon]{}-e^{\frac{2(a+1)\pi}{3}i}I$. Y sumando las 4 integrales, tenemos:

$\oint_\Gamma\frac{z^a\,dz}{z^3+1}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f,e^{\frac{\pi}{3}i}\right)=I-e^{\frac{2(a+1)\pi}{3}i}I\Rightarrow I=\frac{-\left(\frac{2}{3}\right)\pi i e^{\frac{(a+1)\pi}{3}i}}{1-e^{\frac{2(a+1)\pi}{3}i}}$ que tras alguna simplificación

resulta: $I=\frac{-\left(\frac{2}{3}\right)\pi i}{e^{-\frac{(a+1)\pi}{3}i}-e^{\frac{(a+1)\pi}{3}i}}=\frac{\pi}{3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}(a+1)\right)}$ □

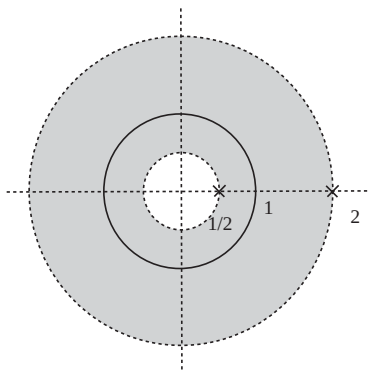
5 Definir transformada z de una señal de tiempo discreto. Hallar $x[n]$ si su transformada z es

$$X(z)=\frac{-\frac{1}{4}}{1-2z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

y su región de convergencia contiene a la circunferencia unidad.

Solución:

Aquí es fundamental tener presente la región de convergencia:



Así que el primer sumando de la tranformada, $\frac{-\frac{1}{4}}{1-2z^{-1}}$ corresponde a una señal a izquierdas, y el

segundo, $\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, a una señal a derechas. Por tanto la señal pedida es:

$$x[n]=+\tfrac{1}{4}(2)^n u[-n-1]+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

El mismo resultado se obtiene manipulando ambos sumandos con la fórmula de la suma de una serie geométrica y teniendo presente la región de convergencia, es decir que $X(z)$ converge para $\frac{1}{2}<|z|<2$. □

6 Calcular razonadamente la transformada de Laplace de la función $x(t)=t\cdot e^{-at}\cdot u(t)$, con $a>0$. Deducir la región de convergencia y hallar los ceros y los polos de la transformada.

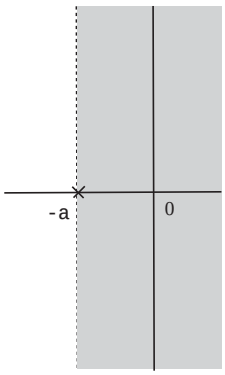
Solución:

Aquí se puede aplicar la definición de transformada de Laplace a la señal dada, o bien hacer lo que sigue:

Como $e^{-at}\cdot u(t)\xleftrightarrow{\mathfrak{L}}\dfrac{1}{s+a}$, con RC: $\mathrm{Re}(s)>-a$ que se comprueba fácilmente.

Y, además, se tiene la propiedad: $-tx(t)\xleftrightarrow{\mathfrak{L}}\dfrac{dX(s)}{ds}$, con RC = a la RC de $X(s)$

se tendrá que $t\cdot e^{-at}\cdot u(t)\xleftrightarrow{\mathfrak{L}}\dfrac{1}{(s+a)^2}$, con RC: $\mathrm{Re}(s)>-a$:



Es claro que la transformada tiene un polo doble en $s=-a$ y no tiene ceros. □