Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TIEMPO ESTIMADO: 2 horas

E.T.S.I.T. – 2º CURSO / CURSO de ACCESO
AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS / MATEMÁTICAS
EXAMEN PARCIAL – 04.12.01
Profesor A. Plaza

SOLUCIONES

(2.0 p.) **1.-** Resolver el problema de valor inicial siguiente y justificar si la solución del problema es única.

$yz_x + xz_y = 2xyz$, siendo $z = t^2$ sobre la curva inicial
C: $x = t,\ y = t;\ 0 < t < +\infty$

Solución:

La ecuación se puede escribir de forma equivalente como: $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{2xyz}$, es decir el campo vectorial $V = (P, Q, R) = (y, x, 2xyz)$. Como $P\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dx}{dt} = t \cdot 1 - t \cdot 1 = 0$, o bien el problema de valor inicial no tiene solución, o bien tiene infinitas soluciones.

Además como el vector $V = (P, Q, R) = (t, t, 2t^3)$ no es proporcional al vector tangente a la curva inicial $T(t) = (1,1,0)$ en ningún entorno de $t = 0$, por tanto el problema no tiene ninguna solución. (Ver Zachmanoglou & Thoe, págs. 70 y 71).

(2.0 p.) **2.-** Demostrar la unicidad de solución del problema de la ecuación de ondas con condiciones de frontera homogéneas:
$c^2 u_{xx} = u_{tt},\ 0 < x < L;\ t > 0$ y condiciones iniciales: $u(x,0) = f(x);\ 0 < x < L$, y $u_t(x,0) = g(x);\ 0 < x < L$. Considerar el funcional:

$$I(t) = I(t, w) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ell} \left(w_x^2 + \frac{1}{c^2} w_t^2 \right) d\,x$$

Solución:

Supongamos dos soluciones del problema, $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ y consideremos $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Entonces $w(x,t)$ es solución de la misma EDP con condiciones de contorno e iniciales nulas.

Es claro que $\boxed{I(t) \geq 0}$. Además $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L \left(2w_x w_{xt} + \frac{1}{c^2} 2w_t w_{tt} \right) dx = \int_0^L (w_x w_{xt} + w_t w_{xx}) dx$,
donde integrando por partes la segunda parte de la integral se tiene
$\dfrac{dI}{dt} = \displaystyle\int_0^L (w_x w_{xt} + w_t w_{xx}) dx = \int_0^L w_x w_{xt} dx + w_t w_x \Big]_0^L - \int_0^L w_x w_{xt} dx = w_t w_x \Big]_0^L$

Donde, por las condiciones de contorno, resulta que $\boxed{\dfrac{dI}{dt} = 0}$. Además, por las condiciones iniciales $\boxed{I(0) = 0}$. Por lo encuadrado, se tiene que $\boxed{I(t) = 0\ \forall t > 0}$. Por tanto la función sub-integral es idénticamente nula, es decir, $w_t(x,t) = 0,\ w_x(x,t) = 0$. Por tanto $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ es constante, y considerando las condiciones (iniciales y de contorno) resulta que $w(x,t) \equiv 0$, es decir $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

(1.5 p.) **3.-** Considerar el siguiente problema de valor inicial para una ecuación en derivadas parciales de segundo orden con dos variables independientes: $u_{tt} = u_x + u_{xx},\ 0 < x < L;\ t > 0$, con condiciones iniciales $u_t(x,0) = x$; y $u(x,0) = x^2$. Encontrar la serie de Taylor de la función u alrededor del origen hasta el orden dos usando las condiciones iniciales y la EDP del problema.

Solución:

Es claro que las funciones que aparecen son funciones analíticas, por tanto, aplicando el teorema de Cauchy-Kovalevsky, se podrá obtener la solución del problema en forma de serie de Taylor alrededor del origen. Derivando adecuadamente se obtiene:

$$u(0,0) = 0$$
$$u_x(x,0) = 2x \to u_x(0,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = x \to u_t(0,0) = 0$$
$$u_{xx}(x,0) = 2 \to u_{xx}(0,0) = 2$$
$$u_{xt}(x,0) = 1 \to u_{xt}(0,0) = 1$$
$$u_{tt}(0,0) = u_x(0,0) + u_{xx}(0,0) \to u_{tt}(0,0) = 0 + 2 = 2$$

Por tanto la aproximación pedida es $\boxed{u(x,t) \approx x^2 + xy + t^2}$

(3.0 p.) **4.-** Deducir la distribución de temperatura $u(x,t)$ en una cuerda de longitud L ($u_t = u_{xx};\ 0 < x < L,\ 0 < t$) en la que los extremos se encuentran aislados ($u_x(0,t) = 0;\ u_x(L,t) = 0$) y la distribución inicial de temperatura viene dada por la función $\phi(x)$ (es decir $u(x,0) = \phi(x)$). ¿Cuál es el régimen estacionario de temperatura? ¿Cómo lo interpretas?

Solución:

Aplicando el método de separación de variables se obtiene la solución en la forma $u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos(\frac{n\pi}{L}x)$ con $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx$ por la condición inicial.

El régimen estacionario de la solución se obtiene haciendo tender t hacia infinito. Es decir tanto, $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos(\frac{n\pi}{L}x) = \frac{a_0}{2}$. Es decir el régimen estacionario es el valor medio de la temperatura en la cuerda de longitud L, porque $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \phi(x)dx$.

(1.5 p.) **5.-** Convergencia absoluta y convergencia condicional de series numéricas. Conceptos y principales resultados.

Solución:

Una serie numérica de términos arbitrariamente positivos y negativos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se dice absolutamente convergente si converge la serie de los valores absolutos, es decir si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente. Convergencia absoluta implica convergencia, pero el recíproco es falso como manifiesta el ejemplo siguiente:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente (por el teorema de Leibnitz, por ejemplo) pero no absolutamente convergente pues $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente.

Por otro lado una serie de términos arbitrariamente positivos y negativos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se dice que es incondicionalmente convergente si cualquier reordenación suya converge (al mismo número).
Se tienen los siguientes resultados fundamentales:
<u>Teorema de Dirichlet</u>: Una serie es absolutamente convergente si y sólo si es incondicionalmente convergente.
<u>Teorema de Riemann</u>: Si una serie es convergente, pero no incondicionalmente convergente, entonces hay una reordenación suya que convergen a cualquier número prefijado, que es oscilante, o incluso que es divergente.
Este último teorema se puede explicar más del siguiente modo:
Sea una serie numérica de términos arbitrariamente positivos y negativos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y sean $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ las series de los términos positivos y de los términos negativos respectivamente de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Entonces:

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ son convergentes entonces la serie inicial es incondicionalmente convergente y además $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.
b) Si una de las dos series ($\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ó $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$) es divergente, entonces la serie inicial es incondicionalmente divergente, y
c) Si ambas series ($\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$) son divergentes, entonces hay una reordenación de la serie inicial que converge a cualquier número prefijado, que es oscilante, o incluso que es divergente.