Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

E.T.S.I.T. – 2º CURSO
AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
CONVOCATORIA ORDINARIA – 08.02.00
Profesor A. Plaza

TIEMPO ESTIMADO: **2.0** Horas.
Los que se examinan de toda la asignatura deben responder a las 4 primeras preguntas.
Las personas que liberaron el primer parcial deben responder a las 4 últimas preguntas.

(2.5 p.) **1.** Comprobar que la superficie: $x^2+y^2+z^2=u_1$ es una primera integral de V dado a continuación. Encontrar la superficie integral del campo vectorial V que contiene a la curva C:

$$V=(y-z,z-x,x-y).\ C: x=t,\ y=2t,\ z=0,\ 0<t<+\infty$$

(2.5 p.) **2.** Deducir la distribución de temperatura $u(x,t)$ en una cuerda de longitud L en la que ambos extremos permanecen aislados si la distribución inicial de temperatura viene dada por la función $\phi(x)$ y el coeficiente de difusión es igual a la unidad. Hallar el límite cuando $t\to+\infty$ e interpretarlo físicamente.

(2.5 p.) **3.** a) Clasificar las singularidades de la función: $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^5+z}$

b) Aplicar la integración en el plano complejo para hallar:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x+x^5}\,dx.$$

(2.0 p.) **4.** Sea un sistema LTI caracterizado por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n]+\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+\frac{1}{3}x[n-1]$$

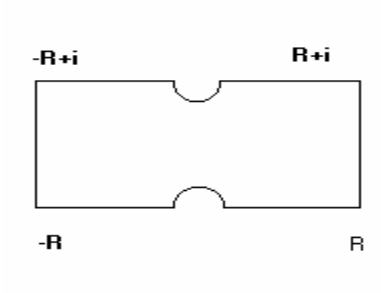
Resolver la ecuación con condiciones iniciales nulas si $x[n]=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u[n]$.

(Continúa)

(2.5 p.) **5.** Clasificar las singularidades de las siguientes funciones:

a) $f(z)=\dfrac{z}{\operatorname{sen} z}$, b) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$, c) $f(z)=\dfrac{1}{z\left(e^z-1\right)}$, d) $f(z)=(z-3)\operatorname{sen}\dfrac{1}{z+2}$.

(2.0 p.) **6.** Calcular la siguiente integral $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{Sh} x}\,dx$ al integrar utilizando el recinto de la figura:



(2.0 p.) **7.** Calcular mediante la fórmula integral de la transformada inversa de z, y el teorema de los residuos la transformada inversa de $X(z)=\dfrac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$, $|z|>1$.

LAS NOTAS SERÁN PUBLICADAS EL VIERNES 12.
LA REVISIÓN DE EXÁMENES SE REALIZARÁ EL LUNES 14 Y EL MARTES 15 DE 10 A 12.00 HORAS EN EL DESPACHO D-39 DEL EDIFICIO DE MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA.

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

E.T.S.I.T. – 2º CURSO
AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
PRUEBA ESPECIAL– 28.02.00
Profesor A. Plaza

(3.0 p.) **1.-** Dar razonadamente, o explicar por qué no existe, un ejemplo de cada una de las siguiente funciones:

(a) $f \in H(\mathbb{C})$, no constante y tal que $\{z \text{ tal que } f(z)=0\} = \varnothing$.

(b) $f \in H(\mathbb{C})$, no constante y tal que $\{z \text{ tal que } f(z)=0\}$ sea no acotado.

(c) $f \in H(\mathbb{C})$, no constante y tal que $\{z \text{ tal que } f(z)=0\}$ sea una circunferencia.

(2.0 p.) **2.-** Resolver por métodos de variable compleja la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x}} .$$

(3.0 p.) **3.-**

(a) Calcular la transformada de Laplace de la función $x(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$. Deducir la región de convergencia.

(b) Sea $x[n]$ una señal causal tal que además $x[0] = x[1] = 1$. Encontrar en función de la transformada z de $x[n]$ el valor $x[2]$.

(2.0 p.) **4.-** Como aplicación de la transformada de Laplace, hállese la solución del problema de valor inicial siguiente:

$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 2u(t)$, con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $x'(0) = -5$.

LAS NOTAS SALDRÁN MAÑANA.
LA REVISIÓN DE EXÁMENES SE HARÁ EL MARTES 29 DE 10 A 12.00 HORAS EN EL DESPACHO D-39 DEL EDIFICIO DE MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA.

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

E.T.S.I.T. – 2º CURSO
AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
PRUEBA – 23.06.99
Profesor A. Plaza

SOLUCIONES

(2.0 p.) 1.- Resolver el sistema de ecuaciones de primer orden siguiente:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{xdy}{x^2 + z^2} = -\frac{dz}{xy}$$

Véase el ejemplo 2.2 del **Zachmanoglou**, pág. 37. □

(2.0 p.) 2.- Deducir la distribución de temperatura $u(x,t)$ en una cuerda de longitud L en la que ambos extremos permanecen a temperatura constante nula si la distribución inicial de temperatura viene dada por la función $\phi(x)$ y el coeficiente de difusión es igual a la unidad.

Véase la solución en el apartado 2 del **Zachmanoglou**, pág. 336 y sig. □

(2.0 p.) 3.- Definir y clasificar las singularidades aisladas de una función holomorfa. Relacionar las distintas singularidades con el correspondiente desarrollo de Laurent de la función en el punto.

Teoría: Véanse los teoremas de clasificación de singularidades. □

(2.0 p.) 4.- Aplicar la integración en el plano complejo para hallar:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta.$$

Véase la solución en el problema 13 del **Murray Spiegel** (Variable compleja), pág. 182. □

(2.0 p.) 5.- Hallar $x[0]$ si la transformada z de la sucesión $x[n]$ es

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - 2z^{-1}}$$

y su región de convergencia contiene a la circunferencia unidad.

Teniendo en cuenta la región de convergencia se puede recuperar la sucesión $x[n]$ y hallar $x[0] = \frac{1}{3}$
También se pueden aplicar los teoremas del valor inicial. □

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

E.T.S.I.T. – 2º CURSO
AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
PRUEBA – 06.09.99
Profesor A. Plaza

SOLUCIONES

(2.0 p.) **1.-** Resolver el sistema de ecuaciones de primer orden siguiente:

$$\frac{ydx}{y^2+z^2}=\frac{dy}{xz}=-\frac{dz}{xy}$$

Véase el ejemplo 2.2 del **Zachmanoglou**, pág. 37. □

(2.0 p.) **2.-** Resolver por el método de Fourier el siguiente problema:

$$u_{tt}+2au_t-c^2u_{xx}=0,\ \text{para } 0<x<\pi, t>0$$
$$u(x,0)=\operatorname{sen}^2 x,\ \text{para } 0<x<\pi$$
$$u_t(x,0)=0,\ \text{para } 0<x<\pi$$
$$u(0,t)=0,\ \text{para } t>0$$
$$u(\pi,t)=0,\ \text{para } t>0$$

Véase la solución en el **Weinberger**, pág. 121. □

(2.0 p.) **3.-** Hallar la serie de Laurent en el origen de la función:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{az}-1}{z} & z\neq 0\\ a & z=0\end{cases}$$

Deducir el tipo de singularidad de la función en el origen.

Para hallar la serie de Laurent en el origen de la función se puede utilizar la serie de Taylor de la función $g(z)=e^{az}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(az)^n}{n!}$. De donde: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(az)^{n-1}}{n!}$. Por tanto, se trata de una singularidad evitable, como se puede observar también si más que notar que el límite en el origen exite (es cero). □

(2.0 p.) **4.-** Enunciar y relacionar el teorema de Cauchy para las derivadas y el teorema de Laurent.

(2.0 p.) **5.-** Usando únicamente la definición de la transformada z, mostrar que si $X(z)$ es la transformada z de $x[n]$, entonces:

(a) $x^*[n]\xleftrightarrow{z}X^*(z^*)$

(b) $x[-n]\xleftrightarrow{z}X^*\left(\frac{1}{z}\right)$

(c) $\operatorname{Re}\{x[n]\}\xleftrightarrow{z}\frac{1}{2}\left[X(z)+X^*(z^*)\right]$